Kandidatspeciale i matematikkens didaktik

Uffe Mose

Regneartenes hierarki og problemløsning i 1. gymnasieklasse

Vejleder: Claus Michelsen

30. november 2009, 2. udgave

Institut for matematik og datalogi

Syddansk Universitet, Odense

Resumé

Denne specialeopgave omhandler et undervisningsforløb, der er designet til 1. gymnasieklasse. Da eleverne i starten af gymnasietiden typisk har vanskeligt ved den grundlæggende algebra, er det specialeopgavens formål at undersøge om elevernes forståelse herfor kan forbedres. Grundidéen er at legemliggøre og visualisere de grundlæggende algebraiske koncepter, og ud fra konkrete øvelser forklare algebraen uden brug af algebraisk tankegang. Hertil har jeg, på baggrund af teorier fra førende matematiske didaktikere, danske lærebøger og egne idéer, designet et undervisningsforløb, der i bogstaveligste forstand skal gøre algebraen håndgribelig ved bl.a. at lade eleverne fylde bønner i bægre, og med en vippevægt lave ligninger ved hjælp af søm og skruer. Lektionerne er bygget op i tre dele, så de følger en metode af Alan Bell (DRM) hvor eleverne først skal arbejde selvstændig på udvikling af algebraiske koncepter. Specielt lighedsbegrebet og ligningsløsning, men også kvadratsætningerne og brøkregning bliver behandlet. Herefter skal en klassediskussion samle op på og navngive koncepterne, før eleverne til sidst skal bruge konceptet til opgaveløsning. Den fysiske håndtering af vippevægtene viste sig at være en god hjælp til manipulation af ligheder, for de elever der endnu ikke mestrede den fundamentale algebra.

Specialeopgavens reference:

Mose, U. (2009). Regnearternes hierarki og problemløsning i 1. gymnasieklasse (kandidatspeciale). Odense: IMADA, Syddansk Universitet.

Abstract

Hierarchy of mathematical operations and problem solving at grade 10

This master thesis presents and treats an educational course, designed for grade 10, and is written in Danish. Because algebra can be difficult to learn, the purpose of the thesis is to examine how to improve the students' understanding of basic algebra. The main idea is to embody and visualize the basic algebraic concepts, to make them concrete and understandable in a way that does not use the traditional algebraic explanations. To do so, I have designed an educational course that makes the algebra tangible for the students, by putting beans into cups, and making equations out of nails and screws on a balance. The lessons are designed to fit *the diagnostic and responsive method* by Alan Bell, where the students are to develop algebraic concepts, here specifically the concepts of equality and solving equations, then the concepts are discussed in class, and finally the students have to use the concepts in connection with exercises. The concrete, practical experiments with the balance gave an increased comprehension to students, who had not already learned how to manipulate equations.

Reference:

Mose, U. (2009). Hierarchy of mathematical operations and problem solving at grade 10 (master thesis, Danish title: Regnearternes hierarki og problemløsning i 1. gymnasieklasse). Odense: IMADA, University of Southern Denmark.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning 7

2 Hvad skal eleverne lære? 9

2.1 Hvad er matematik? 9

2.2 Hvorfor skal eleverne lære matematik? 10

2.3 Hvilke dele af matematikken skal eleverne lære? 11

2.4 Hvilke forudsætninger kommer eleverne med? 12

3 Hvor opstår problemerne? 15

3.1 Variable og beviser 15

3.2 Strukturer 16

3.3 Lighedsbegrebet 17

3.4 Ligningsløsning 17

3.5 Sprogligt formulerede opgaver 20

4 Hvorfor har eleverne problemer med at lære matematik? 23

4.1 Den onde cirkel 23

4.2 Løsningsmetoder 24

4.3 Hvorfor har eleverne problemer med algebra? 26

5 Hvordan optimeres undervisningen så problemerne afhjælpes? 27

5.1 Amerikanske principper 27

5.2 Lige ret 28

5.3 Undervisningsplan 29

5.4 Undervisning 30

5.5 Indlæring 33

5.6 Evaluering 36

5.7 Teknologi 36

5.8 Hvis principperne overholdes, er undervisningen da tilfredsstillende? 38
6 Hvordan sikres det at eleverne har lært hvad de skal lære? 41
7 Metode til udarbejdelsen af undervisningsforløbet 44
8 Lærebogsanalyse 47
8.1 MAT 1 47
8.2 MAT B1 - HTX 49
8.3 Teknisk matematik 51
8.4 Tal, geometri og funktioner 52
9 Undervisningsforløbet 54
9.1 Regnearternes hierarki..57
9.2 De 5 emner og deres formål 58
9.2.1 Bægre & bønner..58
9.2.2 Ligevægt 59
9.2.3 Arealer...60
9.2.4 Brøker..61
9.2.5 Potens & rod 63
9.3 Det videre forløb 64
10 Evaluering af de empiriske undersøgelser...67
10.1 Regnearternes hierarki..69
10.2 Bægre & bønner 71
10.3 Ligevægt 76
10.4 Arealer 78
10.5 Brøker 80
10.6 Potens & rod..82
10.7 Statistik over evalueringsarket..86
10.8 Evaluering af specifikke opgaver...90

10.8.1 Opgave 160 90
10.8.2 Argumentationsøvelse 91
10.9 Evaluering af det samlede forløb 94
11 Redesign af undervisningsforløbet 98
12 Konklusion 100
12.1 Eleverne skal trænes i færdigheder og forståelse 100
12.2 Eleverne skal lære at læse en opgave 100
12.3 Vægte kan lære eleverne algebra 101
12.4 Eleverne vil have uforpligtende matematik 101
Bilag 1 - Hvordan det løses 103
Bilag 2 – Programmer på internettet 105
Bilag 3 – Elevark 109
Bilag 4 - De tre regnearter 125
Bilag 5 – Kvadratsætningerne 127
Bilag 6 – Argumentationsøvelse 128
Litteraturliste 135
Undervisningsmateriale 139
Litteratur anvendt uden henvisning 139

1 Indledning

Februar 2008 var jeg så heldig at blive tilbudt et fuldtidsvikariat som matematikunderviser på Studenterkurset i Sønderjylland, hvor eleverne tager en almen gymnasieuddannelse på to år. Jeg var klar til at skrive mit didaktiske speciale, og var taknemlig for muligheden for at få lidt erfaring i den verden jeg bevægede mig ind i. Det gik hurtigt op for mig, at elevernes vanskeligheder i opgaver og i undervisningen ofte tog udgangspunkt i, at de ikke mestrede de basale regneregler.

Det interessante var, at mine kolleger var enige i betragtningen. Det var tilsyneladende helt almindeligt, at eleverne havde vanskeligheder med at isolere en variabel og reducere et udtryk. En af mine kolleger stillede spørgsmålet som jeg selv havde haft i baghovedet, men endnu ikke fået formuleret:

> ”*Giver det overhovedet mening, at undervise eleverne i differentialregning, når eleverne ikke kan isolere en variabel?*”

Jeg havde fundet en relevant problemstilling, og da jeg blev kontraktansat på HTX i Odense efter sommerferien gentog scenariet sig på trods af, at matematikundervisningen i 1. gymnasieklasse introduceres med et forløb på 20 timer, hvor eleverne arbejder med det matematiske sprog og de grundlæggende algebraiske færdigheder. Min kollega, Frank Nasser, har døbt kurset ”ULULU”, hvilket står for ”udtryk, logik, udsagn, ligninger og uligheder” (undervisningsmaterialet findes på http://matbog.dk). Jeg vidste nu at jeg havde et omdrejningspunkt for min specialeopgave, nemlig at finde ud af hvordan eleverne på en simpel måde lærer den basale algebra.

Ved specialearbejdets begyndelse udarbejdede jeg i samarbejde med min vejleder følgende problemformulering:

> *Specialet har til formål at undersøge gymnasieelevers kendskab og forståelse af regneartemes hierarki, isolering af en variabel og reduktion. Specialeopgaven tager udgangspunkt i aktuelle didaktiske teorier vedrørende elevers læringsvanskeligheder i forbindelse med problemløsning, der inkluderer reduktion, variabelidentifikation og isolering af en variabel. På baggrund af en analyse af udvalgte lærebøger til matematikundervisningen i*

1. gymnasieklasse udvikles der et konkret forslag til et undervisningsforløb med tilhørende læremidler, hvor formålet er at forbedre elevernes forståelse af regnearternes hierarki, isolering af en variabel og reduktion gennem problemløsning. Undervisningsforløbet evalueres ved en empirisk undersøgelse med deltagelse af gymnasieelever.

Gennem specialeforløbet har jeg fastholdt denne problemformulering. Jeg har dog lagt mindre vægt på regnearternes hierarki, og mere vægt på forståelse af den fundamentale algebra. Specielt vil jeg i opgaven undersøge, om elevernes forståelse for den fundamentale algebra kan forøges gennem fysiske eller visuelle repræsentationer af algebraen.

Specialearbejdet er opdelt i tre hoveddele. I første del, som er en teoridel og omfatter kapitel 2-6, vil jeg se nærmere på teorier og undersøgelser, som bl.a. omhandler elevers vanskeligheder med matematik. Herefter vil jeg designe et undervisningsforløb, og har i den forbindelse analyseret en række eksisterende lærebøger. Denne del er beskrevet i kapitel 7-9. I kapitel 10-0 vil jeg analysere resultatet af de empiriske undersøgelser, foretaget på i alt fire klasser fra Odense Tekniske Gymnasium, og skitsere et redesign af undervisningsforløbet der kan danne grundlag for videre undersøgelser.

Med undervisning ved siden af specialeskrivningen, har processen været presset. Jeg vil derfor gerne rette en stor tak til min hustru Laila for forståelse og tolerance, når specialeskrivningen har vundet over huslige pligter og sociale aktiviteter.

Ligeledes vil jeg takke elever, kolleger og ledelse på OTG, som alle har spillet en stor rolle i specialearbejdets empiriske undersøgelser.

Endelig vil jeg takke min vejleder Claus Michelsen for faglige referencer, gode råd og en positiv tilgang til de ideer jeg har genereret under forløbet.

2 Hvad skal eleverne lære?

I indledningen skriver jeg, at jeg vil arbejde på at lære eleverne i 1. gymnasieklasse den basale algebra på en simpel og forståelig måde. Hertil vil jeg undersøge, om problemstillingen er relevant, og i givet fald hvad der kan gøres for at forbedre elevernes algebraiske færdigheder. I dette kapitel vil jeg se på, hvad matematik og matematisk forståelse er, samt hvorfor det er relevant at lære og forstå den basale algebra. Jeg vil herefter fastlægge hvilke fokuspunkter der er hensigtsmæssige, hvis eleverne skal opnå forståelse for den basale algebra, og endelig hvilke forudsætninger eleverne i 1. gymnasieklasse har for at forstå algebraen.

2.1 Hvad er matematik?

Fysikeren vil måske sige, at matematik er et godt redskab til at forklare fysikken, filosoffen (platonisk) vil måske sige, at matematik er den rette træning for at forstå universet (Shapiro, 2000) og matematikeren vil måske sige, at matematik handler om relationer og refleksioner (”mathematics is the science of patterns.”, Schoenfeld, 1994b, s. 55). Der bliver i virkeligheden sagt det samme på tre forskellige sprog. Det højeste mål må derfor være, at lære eleverne at reflektere over, forklare og forstå sammenhænge i livet og i universet. Eleverne kan kun opnå denne forståelse, hvis de tager skridtet fra blot at kommunikere med underviseren til også at kommunikere med sig selv (Ben-Zvi & Sfard, 2007). Det skal forstås således, at eleverne skal være i stand til at stille kritiske spørgsmål, og selv formå at søge svaret på disse, hvis de skal forstå matematikken. Det er altså ikke nok at kunne besvare de spørgsmål underviseren stiller, for at opnå forståelse. Formår eleverne derimod at diskutere og overbevise sig selv om løsningen af et problem, må de herefter overbevise en jævnbyrdig, og til sidst en kritisk modstander som for elevernes vedkommende kan være en underviser eller en dygtig elev, før de kan være sikre på, at løsningen ikke blot er intuition, men en matematisk holdbar løsning (Schoenfeld, 1994a). At lære algebra, eller ethvert andet matematisk emne, betyder ifølge Dettori (2001), at forstå og blive i stand til at bruge dens hovedkoncepter og formelle redskaber. Derfor vil jeg med denne opgave arbejde på færdigheder gennem forståelse, frem for færdigheder for færdighedernes skyld. Emnemæssigt vil jeg begrænse mig til, at dykke ned i algebraen og fokusere på isolering af en variabel i ligningen samt reducering af udtryk, som er områder eleverne typisk har vanskeligt ved at lære (Arcavi, 1994) og færdigheder der kræves igennem resten af gymnasieforløbet.

Hvis eleverne skal have en fornuftig forståelse af lighedsbegrebet, skal de lære at se lighedstegnet som en relation mellem udtryk, hvor ligheden kan bevares ved at foretage samme korrektion af begge udtryk frem for, at se lighedstegnet som et statisk tegn, der udtrykker at de skal foretage en udregning og komme frem til et svar. Herudover skal eleverne kende regneartemes hierarki hvis de skal isolere en variabel. Ligeledes er et kendskab til regneartemes hierarki en forudsætning hvis udtryk skal reduceres.

2.2 Hvorfor skal eleverne lære matematik?

Spørger jeg hvad eleverne skal lære, må det nødvendigvis gøres klart hvorfor disse mål sættes. Det er ikke blot fordi isolering af en variabel og reducering af et udtryk er kernen i symbolbehandlingskompetencen (symbol- og formalismekompetencen, Niss, 2002), at der skal være særligt fokus på disse emner, men fordi det er forudsætningen for at kunne lave de algebraiske beviser eller udregninger, der opstår i forbindelse med matematisk problemløsning, og som er en vigtig genvej til at forstå mange matematiske koncepter. Den basale algebra er derfor et vigtig redskab til at løfte elevernes matematiske tankegang til et højere niveau, og netop træning i denne tankegang er vigtigere end den konkrete matematik. Det harmonerer måske ikke med opfattelsen af matematik som et redskabsfag, men lad mig drage en parallel til faget dansk, hvor eleverne lærer at analysere digte, bøger, film, billeder, reklamer med mere. Jeg formoder at det er de færreste elever, der sidenhen er afhængige af at kunne analysere samtlige af disse medier, men hvis eleverne har opnået en forståelse for metoderne, vil denne analytiske tankegang komme dem til gode i resten af livet, ved større evne til at gennemskue påvirkninger og manipulationer fra omverdenen. Tilsvarende vil de elever, der ikke vælger en naturvidenskabelig eller teknisk karriere, måske aldrig finde anvendelse for infinitesimalregningen, men har de opnået en forståelse for dette samt andre matematiske koncepteter, vil de også have større mulighed for at kunne se kritisk og analytisk på mange problemstillinger i deres daglige liv og virke.

Hvis eleverne blot skal lære for skolen og ikke for livet, som Seneca skriver i sine breve til Lucilius (106, 12, ”*Non vitae, sed scholae discimus*”), vil min betragtning ikke holde, men da vil det heller ikke give mening at undervise eleverne i matematik. Derfor skal eleverne også forstå, hvornår de kan anvende deres viden uden for matematiktimerne, og det er således ikke nok at styrke deres tekniske niveau og øge deres dækningsgrad. Alle tre dimensioner af symbolbehandlingskompetence skal styrkes, og ligeledes skal der satses på en øget aktionsradius (se Niss, 2002) hos eleverne. Foruden dette, vil eleverne per definition ikke være i stand til at bruge deres viden i fysik eller kemitimerne, eller når behovet opstår uden for skolen. Det er derfor vigtigt, at eleverne lærer at anvende den basale algebra i sammenhæng med problemløsning, og herigennem ikke blot arbejder på forståelse af udvalgte matematiske emner, men også forståelse af selve algebraen, og på gymnasialt niveau specielt isolering og reducering.

2.3 Hvilke dele af matematikken skal eleverne lære?

Når eleverne starter i 1. gymnasieklasse, har de som regel opbygget en fornuftig talfornemmelse gennem talrige aritmetiske opgaver gennem grundskolen. Talfornemmelse består bl.a. af en forståelse for hvordan tal opfører sig og afhænger af hinanden, herunder at kunne se løsninger uden brug af algoritmer (Arcavi, 1994). Tilsvarende foreslår Arcavi at kernen i en algebraisk kompetence må være at besidde en symbolfornemmelse, og at en sådan symbolfornemmelse må indeholde punkterne fra følgende, let omskrevet og forsimplet, liste (Arcavi, 1994, s. 31):

- *Viden om hvad symbolerne står for, og hvornår de skal bruges*
- *Fornemmelse for, hvornår et symbol med fordel kan erstattes med noget andet. F.eks. at benytte den faktiske værdi frem for et symbol, hvis værdien kendes*
- *Fornemmelse for strukturer. F.eks. at se den lineære struktur for v i ligningen $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$*
- *Evnen til at udtrykke mundtlige eller grafiske informationer algebraisk, og at behandle disse*
- *Evnen til at vælge passende repræsentationer i et problem, og om nødvendigt at kunne ændre disse, hvis det første valg ikke viser sig at være hensigtsmæssigt. F.eks. at omdøbe et rationelt tal fra a til $\frac{p}{q}$, eller lade $2n-1$ repræsentere de ulige tal*
- *Indsigt i nødvendigheden af, hele tiden at holde styr på symbolernes betydning, og tjekke om beregninger og resultater giver mening*

- *Viden om, at et symbol ikke nødvendigvis har samme betydning i forskellige situationer*

Ovenstående liste er ikke en definition af symbolfornemmelse, men blot en række punkter Arcavi mener den må indeholde. Jeg vil adoptere Arcavis beskrivelse af symbolfornemmelse, og stille mig enig i hans opfattelse (Arcavi, 1994) af, at hvis symbolfornemmelse er kernen i at forstå og mestre algebra, er det nødvendigt at undervise målrettet efter at opbygge denne fornemmelse hos eleverne. I Arcavis beskrivelse af symbolfornemmelse, lægges specielt vægt på forståelse og fornemmelse, men med punktet ”*Evnen til at udtrykke mundtlige eller grafiske informationer algebraisk, og at behandle disse”* ligger også evnen til at behandle algebraiske udtryk og udsagn. Derfor må symbolfornemmelse være kernen i algebra, og undervisningen skal målrettes efter, at eleverne opnår en symbolfornemmelse, hvor flest mulige punkter fra listen indgår.

2.4 Hvilke forudsætninger kommer eleverne med?

Undervisningen skal foregå på et niveau hvor eleverne har de nødvendige forudsætninger for, at tilegne sig de færdigheder og kundskaber jeg som underviser tilstræber at lære dem. Jeg vil derfor kaste et blik på, hvilke forudsætninger eleverne har fra grundskolen. I undervisningsministeriets fælles mål 2009 for matematik kan slutmål og trinmål for grundskolens 9. Klasse læses. Trinmålene for 7.-9. Klasse (UVM, 2009, s. 9) indeholder bl.a. følgende målsætninger:

> *Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at:*

- *Forstå og benytte variable og symboler, bl.a. når regler og sammenhænge skal vises, samt oversætte mellem dagligsprog og symbolsprog (symbolbehandlingskompetence)*
- *Regne med brøker, bl.a. i forbindelse med løsning af ligninger og algebraiske problemer*
- *Forstå og anvende procentbegrebet*
- *Kende regningsarternes hierarki samt begrunde og anvende regneregler*
- *Forstå og anvende formler og matematiske udtryk, hvori der indgår variable*

- *Anvende funktioner til at beskrive sammenhænge og forandringer*
- *Arbejde med funktioner i forskellige repræsentationer*
- *Løse ligninger og enkle ligningssystemer og ved inspektion løse enkle uligheder*
- *Bestemme løsninger til ligninger og ligningssystemer grafisk*

Eleverne skal altså være i stand til at forstå variable i en sådan grad, at de kan omskrive et problem til symbolsprog og herfra løse det givne problem. De skal kunne løse ligninger og enkle ligningssystemer algebraisk og grafisk. At eleverne skal benytte brøkregning må ikke være nogen hindring.

De fælles mål er skærpet i forhold til grundskolens fælles mål fra 2003 (UVM, 2003). Jeg finder det relevant, at sammenligne de nye fælles mål med de gamle fælles mål, da eleverne der indgår i mine empiriske undersøgelser er blevet undervist efter de gamle fælles mål, mens de elever der starter i gymnasieskolen om nogle få år vil være blevet undervist efter grundskolens nye fælles mål.

Hvor eleverne før skulle kende procentbegrebet efter 9. klasse og forstå det efter 10. klasse, skal de nu forstå det efter 9. klasse. Eleverne skal nu anvende funktioner og arbejde med forskellige repræsentationer, hvor det tidligere var nok at kende funktionsbegrebet. Det er nyt at eleverne efter 9. klasse skal kunne løse ligninger og enkle ligningssystemer frem for enkle ligninger. Eleverne skal stadig kunne regne med brøker ved ligningsløsning og algebraiske problemer. Der bliver til gengæld lagt mindre vægt på at kende tallenes kulturhistoriske betydning samt indførelse af elektroniske hjælpemidler.

Ifølge læseplanen fra 2003 for 7.-9. klassetrin (UVM, 2003, s. 53) skal eleverne under udvidelsen af talområdet til de rationelle tal ”*studere tallenes egenskaber og samspillet mellem regningsarterne, herunder regningsarternes hierarki. Potenser benyttes som en bekvem skrivemåde*”.

I læseplanen fra 2009 for 7.-9. klassetrin (UVM, 2009, s. 26) skal eleverne ud over de rationelle tal, også introduceres til de reelle tal som skal give ”*anledning til nye undersøgelser af tallenes egenskaber og samspillet mellem regningsarterne, herunder regningsarternes hierarki*”. Her skal eleverne bl.a. arbejde med:

- *Tallenes indbyrdes størrelse*

- *Geometrisk repræsentation af regneregler*
- *Potenser og rødder*
- *Omskrivning og reducering af algebraiske udtryk*

Det betyder, at forløbet jeg har lavet til de første fem dobbeltlektioner i gymnasieundervisningen (se kap. 9, s. 53) dækker matematik, som eleverne fremover skal arbejde med i grundskolen. I grundskolen har eleverne måske tid til at gå dybere ned i forståelsen af de algebraiske principper, da tal og algebra udgør én ud af tre matematiske hovedemner, eleverne skal arbejde med gennem grundskolen. Til orientering er de to andre emner geometri samt statistik og sandsynlighed.

Jeg har i dette kapitel set på, hvad matematisk forståelse er, og set at denne forståelse ikke er opnået, hvis eleven ikke kan argumentere for og forklare matematikken. Jeg har argumenteret for, hvorfor matematisk forståelse er relevant, selv for elever der er tilfredse med blot at kunne anvende matematikken og ikke senere vælger en karriere, hvor matematiske kompetencer er en forudsætning, samt hvorfor algebra er en vigtig del af pensum i gymnasieskoles matematikundervisning. Jeg har stillet mig enig med Arcavi i at symbolfornemmelse er kernen i algebraisk kompetence, og gengivet en liste over hvilke dele en sådan symbolfornemmelse må indeholde. Endelig har jeg set hvilke forudsætninger eleverne har fra grundskolen, samt at grundskolens nye fælles mål fra august 2009 sætter større fokus på, at eleverne skal opnå en symbolbehandlingskompetence gennem forståelse for variable og symboler. Målsætningen er derfor, at eleverne fremover skal lære den basale algebra i grundskolen. I næste kapitel vil jeg undersøge hvor problemerne opstår i forbindelse med den basale algebra.

3 Hvor opstår problemerne?

Hvis undervisningen indenfor den basale algebra skal blive bedre, er det vigtigt at vide hvor eleverne har problemer med algebraen. For ikke at risikere at tage fat i problemer der alene skyldes mangler i min egen undervisning, har jeg noteret mig elevproblemer behandlet af anerkendte danske og udenlandske matematikdidaktikere. Det viste sig hurtigt, at elevernes problemer med at lære algebra ikke er et lokalt, men et verdensomspændende fænomen. For overskuelighedens skyld har jeg valgt at gruppere disse problemer, der alle har rod i manglende symbolfornemmelse, i fem delkapitler. Kapitel 3.1 omhandler elevernes problemer med at forstå relevansen og betydningen af at generalisere matematikken. Herefter ser jeg i kapitel 3.2 på elevernes manglende strukturelle overblik. Selve lighedsbegrebet har fået et kapitel (3.3) for sig selv. I kapitel 3.4 ser jeg på ligningsløsning, hvor problemerne har rod i de første tre dele af kapitlet. Kapitlet omhandler nogle konkrete elevproblemer under ligningsløsning. Det sidste delkapitel (3.5) omhandler problemer vedrørende sprogligt formulerede opgaver, der af underviseren forventes oversat til algebra inden de løses.

3.1 Variable og beviser

Mange elever i gymnasieskolen har vanskeligt ved at forstå variabelbegrebet (Michelsen, 2001; Blomhøj & Jensen, 2007). En italiensk undersøgelse har vist, at kun få elever i 16-17 års alderen kan forklare forskellen på parametre, ubekendte og variable (Kieran, 2007, s. 730). Eleverne har en ringe symbolforståelse, selv efter flere år med algebratræning (Arcavi, 1994). Et eksempel på elevernes ringe symbolforståelse giver Sigrid Wagner (Kieran, 1992, s. 402) der interviewede 29 elever fra hvad der i Danmark svarer til grundskolens afgangsklasser og gymnasiet, og kun 38% af eleverne kunne svare korrekt på om W eller N er størst når $7W + 22 = 109$ og $7N + 22 = 109$. Mange mente, at ligningerne skulle løses før det kunne besvares. Det er altså ikke ligegyldigt for eleverne hvilke bogstaver der står i ligningerne, og ser eleverne en formel, har de svært ved at gennemskue hvad de forskellige variable står for, hvilket bunder i manglende forståelse. Når eleverne har lært en strategi eller metode i én kontekst, kan de ikke nødvendigvis benytte den i en anden kontekst (Bell et al., 2004). Således har Bell ved test vist, at 73% af de 15-årige elever kunne løse: ”*Hvad er x når* $2x + 7 = 45$” mens kun 39% kunne løse ”*Hvis* $A = L \cdot B$*, fortæl da hvordan A beregnes. Hvilken formel fortæller os hvordan L skal beregnes?*” (Sfard & Linchevski, 1994, s. 103). Eleverne har i klassen lært at finde x, og vil således helst have opgaver i samme terminologi.

Hvis x f.eks. angiver en højde eller længde har eleverne lært, at x skal have en bestemt værdi. Det kan give problemer i klassiske opgaver, hvor f.eks. alderen på tre personer skal bestemmes ud fra nogle givne informationer. Her kan eleverne have svært ved at forstå, at når x bruges om en af personernes alder, så får de ikke samme værdi for x, som de ville gøre, hvis x stod for en anden persons alder (Kieran, 1992). Skal eleverne opnå forståelse for, hvorfor valget af bogstaverne ikke har betydning for et udtryk eller en ligning samt forståelse for de formler de benytter, skal de ifølge Schoenfeld (1994a) have lov til selv at udvikle formlerne gennem problemløsning. Dette er dog ikke helt let, for når eleverne har regnet på en række enklere tilfælde, og opstillet nogle formodninger, opstår det første almindelige problem i at se nødvendigheden for, at generalisere og bestemme hvornår deres formodninger er korrekte (Bell et al., 2004). Det er ikke kun de svage elever, der har vanskeligt ved at se relevansen i at generalisere og efterfølgende føre et bevis. Selv de elever, der er gode til at manipulere med symboler, kan have vanskeligt ved at formulere beviser og se algebraen som et redskab til forståelse af matematiske ideer (Arcavi, 1994).

3.2 Strukturer

Det er dog ikke kun den overordnede forståelse det halter med hos eleverne. Selve de algebraiske udregninger volder ofte eleverne problemer. Mange gange har eleverne svært ved at se strukturerne i et udtryk eller udsagn. F.eks. at $4(2r+1)+7=35$ kan være det samme som $4x+7=35$ (Kieran, 2006, s. 16), eller at strukturen i $v\sqrt{u}=1+2v\sqrt{1+u}$ fra Arcavis liste (se kap. 2.3, s. 11), er lineær med hensyn til v, og kan løses tilsvarende $av=b+cv$ (Arcavi, 1994). Elevernes usikkerhed omkring bogstavernes betydning gør ligeledes, at selv elever der ingen problemer har med at isolere x i ligningen $3x-x=-2$ har problemer med at gøre det samme i ligningen $kx-x=-2$ (Sfard & Linchevski, 1994, s. 104). Det manglende strukturelle overblik gør også, at eleverne foretrækker at regne et aritmetisk regnestykke ud, frem for at bruge viden om aritmetikkens regneregler når de skal undersøge om to regnestykker, som f.eks. $685-492+947$ og $947+492-685$ er lig med hinanden (Kieran, 1992, s. 395).

3.3 Lighedsbegrebet

Elevernes problemer med lighedsbegrebet kræver også et nærmere eftersyn. Mange elever har opfattelsen af, at et lighedstegn betyder at der skal foretages en regneoperation, hvorefter højresiden skal indeholde resultatet (Kieran, 1992). Det gør bl.a. at flere elever er i stand til at løse ligningen $4+x=13$ end der er elever der kan løse ligningen $13=4+x$ (Bergsten, 2000, s. 52). Observationen bekræftes af Sfard og Linchevski (1994), der fandt ud af, at selv om eleverne netop har løst ligningen $7x+157=248$, kan de ikke nødvendigvis løse ligningen $112=12x+47$. Mange elever mener heller ikke, at et udtryk uden lighedstegn er et færdigt resultat. F.eks. ses udtrykket $4x+4y$ som et ufuldstændigt resultat af arealet, mens $Areal=4x+4y$ ses som et færdigt resultat (Kieran, 1992). Den manglende forståelse for lighedsbegrebet fører ofte til lemfældig omgang med lighedstegnet. Eksempelvis kan eleverne finde på at skrive ”$2{,}3+3{,}2=5{,}5-1{,}5=4$”, hvis de bliver bedt om at beregne værdien af $2{,}3+3{,}2-1{,}5$ (Kieran, 1992; Bergsten, 2000; Sfard & Linchevski, 1994).

3.4 Ligningsløsning

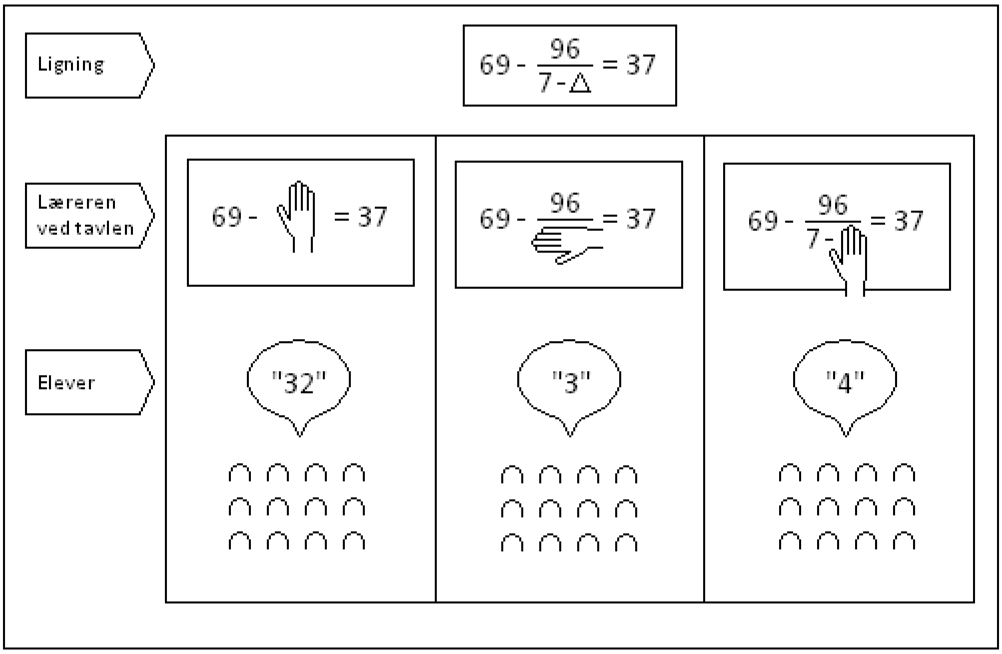
Sfard og Linchevski (1994) testede 14 elever der alle var dygtige elever, og aldersmæssigt jævnt fordelt fra 12-16 år. De fandt ud af, at flere af eleverne opfattede $1+2$ og $5x$ som operationer der skal udføres, og ikke som objekter i sig selv. Det medførte en del vanskeligheder i ligningsløsning. For hvordan trækkes f.eks. en operation fra en operation i ligningen $15x=8x+35$, hvis $8x$ skal trækkes fra på begge sider af lighedstegnet? Nogle elever vil først kende værdien af $8x$, da de ikke mener de kan trække noget fra, hvis de ikke ved hvor meget de skal trække fra, og hvis x blot er en pladsholder for noget der skal ganges på 15 og 8, er det så sikkert at det x der står på venstresiden har samme værdi som det x der står på højresiden? Eleverne blev stillet opgaverne:

> ”*Løs:* $x^2+x+1>0$”,

"Løs: $\begin{cases} 2(x-3) = 1 - y \\ 2x + y = 7 \end{cases}$*"* og

"Er det sandt at følgende system af lineære ligninger $\begin{cases} k - y = 2 \\ x + y = k \end{cases}$ *har en løsning for alle værdier af k?"* (Sfard & Linchevski, 1994, s. 110-114).

Eleverne havde generelt den opfattelse, at løsningen skulle være ét tal eller talsæt. Derfor lykkedes det ikke for nogle af eleverne at løse nogle af disse opgaver. Der var ingen af eleverne der forsøgte at løse opgaverne grafisk, og ingen elever havde forståelse for variable størrelser. Da eleverne i den første opgave ikke kan finde reelle rødder til venstresiden i uligheden, konkluderer de at uligheden ikke har nogen løsning. I den anden opgave, reducerer de den øverste ligning til den nederste. De bemærker at ligningerne nu er ens, men substituerer alligevel og når frem til at $0 = 0$. De ved altså ikke hvad de skal gøre når der opstår et singularitetsproblem, og ved ikke hvordan de skal tolke deres resultat. Interview omkring den sidste opgave viser at eleverne ikke forstår hvad det vil sige at finde en løsning. Elever der kun har arbejdet med algebra i kort tid, ved heller ikke hvordan de viser, at en funden løsning er forkert, andet end at løse ligningen forfra (Kieran, 1992).



Figur 1

Blomhøj og Jensen (2007) bemærker, at eleverne i 9. klasse laver en række huskeregler for forskellige algebraiske udtryk, og at de ikke forstår hvornår det er tilladt at benytte de forskellige "flytteregler". Det vil i praksis betyde, at eleverne ikke vil være i stand til at løse en ligningstype de ikke har set før. Jeg formoder at det er disse flytteregler frem for forståelse af ligningernes væsen der gør, at eleverne har svært ved at bedømme om $x + 37 = 150$ har samme løsning som $x + 37 - 10 = 150 + 10$ (Kieran, 2006, s.16).

Witman (1975) viser, at 7. klasses elever har meget vanskeligt ved at forstå den formelle metode, hvor samme handling foretages på begge sider af lighedstegnet (forskellige metoder vil blive behandlet kap. 4.2, s. 24), men at de til en vis grad kan løse algebraiske opgaver på en mere intuitiv måde, hvor de arbejder sig udefra og ind, ved at holde hånden over dele af ligningen, som vist på figur 1 (Witman, 1975, s. 18). For at løse ligningen $69 - \frac{96}{7-\Delta} = 37$, skal eleverne således først finde værdien af $\frac{96}{7-\Delta}$. Lige nu er det ikke relevant hvad der står i det udtryk de skal finde værdien af, men kun at noget trukket fra 69 skal give 37. Da dette tal er 32, medfører det at $\frac{96}{7-\Delta} = 32$. På samme måde fortsættes ved at sige 96 delt med noget skal give 32, og så fremdeles indtil værdien af Δ er fundet. Samme tendens til at eleverne er i stand til at regne intuitivt ses hos Bell (2004), der bemærker at de 9-13-årige elever klarer opgaver der kræver en intuitiv forståelse bedre end han forventede, mens det står sløjt til med forklaringer og retfærdiggørelse af resultater. Det betyder dog ikke, at der kan satses på den intuitive metode alene. Witman har nemlig nøje udvalgt opgaver der let løses med den intuitive metode. Den kommer dog til kort så snart der skal løses en ligning som $4 + \frac{x}{12} = x - 6$, eller vises at $3(2x + 4) = 6x + 12$. De nævnte problemer løses derimod let med den formelle metode ved at multiplicere den første ligning med 12 og herefter løse det lineære problem, og i anden ligning at dele igennem med 3.

Mange elever har fejlagtigt fået den opfattelse, at matematik handler om at huske de regler underviseren kommer med (Kieran, 1992), og at rigtigheden af matematikken afhænger af om underviseren siger god for det (Lampert, 1990). Eleverne mangler således forståelse for selve matematikkens væsen, hvilket resulterer i at hvis ikke eleverne allerede har set en metode til at løse et givet problem, vil de oftest give op efter få minutter, hvis de overhovedet overvejer at lede efter en løsning i første omgang (Schoenfeld, 1992). Med 20 minutter til rådighed til at løse en opgave vil 60% af almindelige studerende bruge 1 minut på at læse opgaven, og 19 minutter på at prøve at løse den på den første og bedste måde de er kommet på, hvilket oftest fører til fiasko (Schoenfeld, 1992, s. 61).

Ofte ses en manglende forståelse for brøker og rationelle tal, hvor eleverne har svært ved at forestille sig og forklare hvordan det ses, om en brøk er større eller mindre end en anden brøk (Lamon, 2001), hvilket ofte fører til fejlberegninger hos eleverne. Manglende fornemmelse for hierarkiet bærer ligeledes skylden for mange fejlberegninger. Eksempelvis kan halvdelen af de 12-årige elever ikke løse ligningen $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$, da mange af eleverne omskriver venstresiden til $4 + n - 7$ (Kieran, 2007, s. 723).

3.5 Sprogligt formulerede opgaver

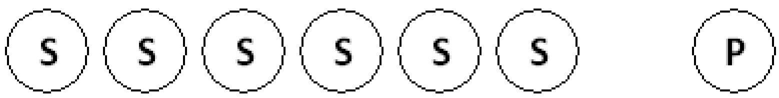
Det er et kendt problem, at det kan være vanskeligt for eleverne at løse en matematisk opgave, der er stillet i form af en sproglig tekst. Et klassisk eksempel er:

> *Anders er 4 år ældre end Peter. Om 2 år vil de tilsammen være 50 år. Hvilken alder har Anders og Peter nu?* (Kieran, 1992, s. 403).

En anden sproglig opgave eleverne ofte har problemer med, er det berømte ”studerende-og-professorer-problem” (Arcavi, 1994; Bergsten, 2000; Kieran, 1992) der lyder som følgende:

> *Opstil en ligning for følgende udsagn: ”Der er seks gange så mange studerende som der er professorer ved dette universitet.” Brug S for antallet af studerende og P for antallet af professorer* (Clement, Lochhead & Monk, 1981, s. 288).

Clement, Lochhead og Monk (1981) testede 150 universitetsstuderendes evne til at løse denne opgave, hvoraf 37% svarede forkert, og to tredjedele af fejlene var på formen 6S=P. Selv når problemet visualiseres som i figur 2 falder eleverne let i denne faldgrube.



Figur 2

Selv efter et eller flere semesters træning i calculus, har mange elever svært ved at oversætte algebraen til og fra sproglig formulering, tabeller samt grafiske afbildninger (Clement, Lochhead & Monk, 1981).

Hvis eleverne trænes i at løse opgaver med en sproglig formulering, kan de have svært ved at løse tilsvarende opgaver med en anden baggrundshistorie (Kieran, 1992).

Jeg vil dog være varsom med at erklære tekstbaserede opgaver sværere end algebraiske i almindelig forstand. Ved at lade en række undervisere i grundskolen og gymnasieskolen vurdere en række opgaver og sortere dem efter sværhedsgrad, fandt Nathan og Koedinger (Kieran, 2007, s. 740) ud af, at underviserne vurderende de algebraiske opgaver lettest for eleverne, mens resultaterne af en test blandt 76 gymnasieskoleelever viste det modsatte, nemlig at der var 25% færre elever der løste de algebraiske opgaver i forhold til de sprogligt formulerede opgaver (Kieran, 2007). Alle opgaverne var lineære opgaver af formen:

> *Da Ted kom hjem fra sit tjenerjob, gangede han sin timeløn med de 6 timer han havde arbejdet den dag. Herefter lagde han de 66 dollar han fik i drikkepenge, og fandt ud af, at han havde tjent 81,90 dollar. Hvad er Teds timeløn?*

Og

> *Bestem x når:* $x \cdot 6 + 66 = 81.90$ (Kieran, 2007, s. 721).

Endnu engang viser det elevernes vanskeligheder ved at løse algebraiske opgaver. Jeg vil derfor konkludere at vanskeligheden i de sproglige opgaver ikke består i den sproglige formulering, men i omskrivningen til og manipulering af det algebraiske udtryk.

I dette kapitel har jeg set på en lang række problemer i forbindelse med manglende symbolfornemmelse blandt eleverne. Formålet med kapitlet var udover at slå relevansen for specialeopgaven fast, at finde ud af hvor problemerne almindeligvis opstår hos eleverne. Jeg er kommet frem til følgende hovedpunkter, som jeg derfor vil give særlig opmærksomhed i designet af undervisningsforløbet: Elevernes ringe symbolfornemmelse gør det svært for eleverne at gennemskue formler, da de mangler forståelse for hvordan formlen er opstået. Det gør det også vanskeligt for eleverne at gennemskue strukturer i udtryk og ligninger. Derfor har de også svært ved at se at de regneregler der gælder for tal, også gælder for andre udtryk end tal. Mange elever ser lighedstegnet som en operator, der skal koge venstresiden ned til et resultat på højresiden, som helst skal være et tal. De har dermed ikke en strukturel forståelse af lighedstegnet. Eleverne laver huskeregler i stedet for at forsøge at forstå algebraen, og kan dermed ikke løse opgaver de ikke er blevet præsenteret for tidligere. Det er også et almindeligt problem, at eleverne har svært ved at løse opgaver der stilles verbalt. Det er dog ikke nødvendigvis den sproglige formulering af opgaverne der volder eleverne problemer, men kravet om at oversætte problemet til det algebraiske sprog. I næste kapitel vil jeg se på hvorfor problemerne opstår.

4 Hvorfor har eleverne problemer med at lære matematik?

Jeg har samlet en række typiske elevproblemer inden for algebraen. Hvis algebraundervisningen skal forbedres, er det nødvendigt at vide hvorfor problemerne opstår. I dette kapitel vil jeg først se på Sfards teori om hvorfor matematik generelt er vanskeligt at lære. Jeg vil herefter behandle de metoder eleverne bruger når de løser ligninger, og endelig vil jeg se på, hvorfor netop algebra er vanskeligt for eleverne at lære.

4.1 Den onde cirkel

Der er mange grunde til at eleverne kan have vanskeligt ved matematik. Anna Sfard (1991) siger at forestillingsevnen bygger på vores sanser. Derfor er det vigtigt at kunne danne sig et billede af matematikken, og at dette billede kan være overordentlig vanskeligt at danne. Sfard deler matematikken op i de operative processer og de strukturelle processer. En operativ proces kan f.eks. være processen hvor en funktion sender et element i definitionsmængden over i en værdi. En strukturel proces kan f.eks. være at finde funktionens ekstrema, eller skæringspunkter for funktioners grafiske afbildninger. De operative processer sker således på enkelte elementer, mens de strukturelle processer sker på de strukturer, i dette tilfælde en funktion, som dannes af en mængde af operative processer.

Det billede der skal dannes, skabes via et overblik over de strukturelle processer. Da de operative processer typisk læres først, når eleverne kun til de strukturelle processer hvis de operative processer laves om til et objekt. Men her risikerer eleverne ifølge Sfard, at havne i en ond cirkel. Det giver nemlig ikke mening at lave de strukturelle processer om til et objekt hvis ikke det skal bruges til noget, og eleverne kan ikke se hvad objektet skal bruges til før de bruger det i de strukturelle processer. Da indsigten ikke kan forventes at komme med det samme, men ofte på uventede tidspunkter, er det kun de motiverede elever der opnår det nødvendige overblik til at kunne danne sig et samlet billede.

Heraf konkluderer Sfard (1991), at de elever der ikke er parat til at kæmpe for at forstå matematikken, aldrig vil opnå forståelsen. Det betyder selvfølgelig ikke, at gymnasieskolens matematikundervisere kan læne sig tilbage i stolen velvidende om, at det er elevens egen beslutning om der skal kæmpes for en forståelse af matematikken eller ej. Balling (2003) skriver, at eleverne kun er aktive, hvis de er motiverede. Derfor skal underviseren sørge for, at motivere eleven til at ville lære matematik, og forsøge at minimere problemerne omkring Sfards onde cirkel.

4.2 Løsningsmetoder

Kieran har listet følgende syv overordnede metoder hvormed algebraiske problemer kan løses (Kieran, 1992, s. 400):

- *Tælleteknik*
- *Kendsgerninger om tal*
- *Gættemetoden (trial-and-error)*
- *Arbejde baglæns*
- *Den formelle metode (foretage samme operation på begge sider)*
- *Flyttemetoden (bytte side - bytte fortegn)*
- *Erstatningsmetoden (cover-up)*

Jeg har tilladt mig at ændre rækkefølgen, så den bedre stemmer overens med den række-følge eleven lærer metoderne på. Når et barn skal lære tallene er der en periode hvor det forbinder tallene med en talrække, og når barnet spørges hvor mange bolde det har, vil bar-net f.eks. svare med talrækken 1,2,3 (Sfard, 1991). Når tælleteknikken er blevet brugt til-strækkeligt mange gange, vil barnet begynde at genkende de svar det får, og herved få den forståelse for tallene der skal bruges til at se svaret på ligningen $5 + x = 8$ uden at tælle sig frem til svaret. Når ligningerne senere begynder at blive mere komplicerede, kan eleverne begynde at gætte på hvad svaret er, hvis de endnu ikke kan løse ligningen på andre måder. Det fører til gættemetoden hvor eleven gætter på svaret og korrigerer det nye gæt efter resultatet af de forrige gæt. Mange matematikundervisere har sikkert fået grå hår i hovedet af elevers brug af gættemetoden, men der skal fremhæves det positive at elever der bruger metoden bliver nødt til at tænke over om gættet er realistisk. Mange elever der har lært den formelle metode, glemmer at tjekke resultatet (Kieran, 1990), og de kan finde på at konklu-dere at Storebæltsbroen er nogle få millimeter lang.

Metoden med at arbejde baglæns er egentlig en række af inverse funktioner, men kan også ses som et forstadie til den formelle metode, som nok er den metode de fleste matematik-undervisere stræber efter at få indarbejdet hos eleverne. Flyttemetoden er et resultat af at have brugt den formelle metode tilstrækkeligt mange gange. Herved læres hvordan objekter kan "flyttes" over på den anden side af lighedstegnet, hvilket er en nyttig metode, da der kan spares nogle tanker ved ikke at lade positive og negative ens led gå ud med hinanden. Hvis ikke den formelle metode fastholdes, kan eleverne dog miste fornemmelsen for lighedsbegrebet og overblikket i uvante situationer. Erstatningsmetoden kunne være placeret højere på listen. At jeg har placeret den sidst skyldes at den kræver et stort overblik og ikke bliver introduceret i nogle af de gymnasielærebøger jeg har arbejdet med. Elever der bruger erstatningsmetoden løser ligningen $2x + 9 = 5x$, ved at sige at 9 skal erstattes med 3x for at ligningen er sand, derfor må 9 være lig med 3x, og så er $x = 3$ (Kieran, 1990).

Alle metoderne kan være brugbare i forskellige situationer, og jo bredere kendskab eleverne har til de forskellige metoder, jo bedre forståelse vil de have for algebraen. Dog har Whitman (1975) med hjælp fra 156 elever fra 7. klasse påvist en tendens til, at elever der er blevet undervist i at løse ligninger 'intuitivt' ved hjælp af en blanding af at regne baglæns og brug af erstatningsmetoden (se kap. 3.4, s. 19), klarer sig dårligere i test hvis de efterfølgende bliver undervist i den formelle metode, end hvis de ikke havde fået denne ekstra undervisning. Forskellen er dog så lille at der ikke er statistisk belæg for resultatet. Til gengæld har Whitman vist, at elever der ikke er blevet undervist i den intuitive metode, men kun i den formelle metode, klarer sig dårligere i testen, end de elever der er blevet undervist i den intuitive metode. Hertil skal der dog retfærdigvis nævnes, at ligninger der ikke umiddelbart kan løses intuitivt er blevet sorteret fra. Det er derfor stadig nødvendigt at undervise eleverne i den formelle metode, som i mange tilfælde er den mest hensigtsmæssige metode. Erstatningsmetoden er dog den metode der bruges ved substitution, og må derfor ikke undervurderes.

De elever der indtil videre har haft held med at klare sig med tælleteknik, kendsgerninger, gættemetoden samt at arbejde baglæns, får problemer når de skal isolere en variabel eller reducere et udtryk. Hver af metoderne har sin form for systematik, men de kan anvendes uden nogen form for variabelforståelse, dvs. uden brug af algebra (Saul, 2001). Derfor vil eleverne mangle de redskaber der er nødvendige for at isolere en variabel eller reducere et udtryk.

4.3 Hvorfor har eleverne problemer med algebra?

Ifølge Kaput (Kieran, 2006, s. 33) skyldes elevernes problemer med algebra, at algebraens meget kompakte symbolsprog forudsætter en algebraisk tankegang der er forskellig fra hvad eleverne har været vant til, og at manglen på visuelle repræsentationer gør det meget svært for eleven at se hvilke handlinger der er hensigtsmæssige. Det kan derfor være en fordel hvis algebraen kan visualiseres og forklares ud fra en ikke algebraisk tankegang. Hvis eleverne regner forkert når de forsøger at løse et algebraisk udtryk, risikerer de at lave de samme regnefejl når de skal tjekke deres resultat hvorved de ikke opdager fejlen (Kieran, 2007). Eksempelvis hvis eleven omskriver $2(x+a)=1$ til $2x+a=1$ og finder at $x=\frac{1-a}{2}$, er det ikke usandsynligt, når eleven vil tjekke op på resultatet ved at substituere $x=\frac{1-a}{2}$ ind i udtrykket $2(x+a)$, at eleven vil lave samme fejl igen og omskrive $2\left(\frac{1-a}{2}+a\right)$ til $\frac{2(1-a)}{2}+a$, og herfra se at det giver 1 som ønsket.

Hvis misforståelsen om at matematik blot handler om at lære de regler underviseren kommer med udenad skal til livs, skal der være sammenhæng mellem eksamen og undervisning. Forstået på den måde, at hvis målet med undervisningen er at eleverne skal opnå forståelse og evne til at anvende matematikken i samspil med andre fag, så nytter det ikke noget hvis eleverne evalueres på om de kan huske alle sætningerne udenad til den mundtlige eksamen. Et uheldigt eksamensforløb kan fremme opfattelsen af at matematik er udenadslære frem for et forståelsesfag.

Jeg er i dette kapitel kommet frem til, at matematik generelt er vanskeligt at lære, fordi overblikket først kommer når de strukturelle processer i et matematisk emne er lært, og at disse processer er svære at lære fordi relevansen af dem ikke kan ses før de er lært. Det er derfor vanskeligt at motivere elever der ikke har en naturlig interesse for matematik, til at lære de strukturelle processer. Uden motivationen er eleverne ikke aktive, og uden matematisk aktivitet kan eleverne ikke lære matematik. Jeg har behandlet syv forskellige metoder til ligningsløsning, og set at manglen på visuelle repræsentationer kan være skyld i, at algebra er vanskeligt at lære. Visualisering af algebraen kan således være en bro til bedre symbolfornemmelse hos eleverne. Jeg vil i næste kapitel undersøge, hvilke rammer for matematikundervisningen der kan fremme elevernes forståelse for algebra.

5 Hvordan optimeres undervisningen så problemerne afhjælpes?

I dette kapitel vil jeg undersøge hvordan der kan sættes optimale rammer for elevernes læringsproces. Jeg vil tage udgangspunkt i amerikanske principper for undervisningen, og med denne ramme undersøge hvordan et undervisningsforløb generelt kan designes og forløbe. Jeg vil behandle problemløsning som et middel til at skabe forståelse hos eleverne, og hvordan der kan tages hensyn til elevernes forskelligheder. Sidst i kapitlet vil jeg argumentere for fornuften i de amerikanske principper for matematikundervisningen, og nyttigheden i at benytte disse principper som ramme om den danske undervisning.

5.1 Amerikanske principper

Matematikundervisernes nationale råd I USA NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), har i året 2000 opstillet nogle få og simple principper for hvordan eleverne sikres den bedste matematikundervisning. De lyder som følgende (NCTM, 2000, s. 11, egen oversættelse):

- ***Lige ret:*** *En optimal matematikundervisning kræver lige ret - høje forventninger og den nødvendige hjælp til alle elever*
- ***Undervisningsplan:*** *En undervisningsplan er mere end en samling emner. Den skal være sammenhængende, fokusere på vigtig matematik og være velkoordineret hen over de forskellige klassetrin*
- ***Undervisning:*** *Effektiv matematikundervisning kræver forståelse for hvad eleverne ved og mangler at lære, og skal udfordre og støtte dem til den bedste indlæring*
- ***Indlæring:*** *Eleverne skal lære matematikken gennem forståelse, og ny viden skal skabes aktivt ved hjælp af erfaringer og den viden de allerede har tillært sig*
- ***Evaluering:*** *Vigtig matematik skal evalueres således, at der skabes nyttig information for både undervisere og elever*
- ***Teknologi:*** *Teknologi er en vigtig del af matematisk undervisning og indlæring. Det påvirker den matematik der undervises i, og forbedrer elevernes indlæring*

De amerikanske principper herover er simple, ambitiøse og kompromisløse. De kan bruges på alle klassetrin, og passer fint ind i undervisningsministeriet læreplaner for matematikundervisningen.

Overskueligheden i opstillingen må ikke undervurderes. Hvis de seks principper benyttes som tjekliste for et undervisningsforløb, kan det f.eks. hurtigt ses om der er oplagte muligheder for forbedring, og hvis et forløb lever op til alle principperne vil jeg efter en diskussion af principperne, argumentere for at forløbet er tilfredsstillende.

5.2 Lige ret

Som bekendt er simple principper ikke en garanti for en let indføring i skolesystemet. Det første princip ”lige ret”, er en stor udfordring, men et ædelt mål. Ideen bag princippet er at alle elever skal udfordres på det niveau de er nået til, og at alle skal have den fornødne hjælp hertil, hvilket kræver differentieret undervisning. Hvis eleverne skal have lige ret, må det derfor først erkendes at eleverne ikke er lige. En af udfordringerne ved differentieret undervisning er, at de gængse lærebøger er skrevet til den almindelige elev og ikke lægger op til niveaudeling af eleverne. Det betyder at den enkelte underviser selv skal forberede den differentierede undervisning, og dermed sætte tid af til dette i forberedelsen af undervisningen. Min tese er, at hvis der forberedes et undervisningsforløb der kan angribes fra tre niveauer, kan eleverne vurdere deres eget niveau ud fra deres evne til at løse problemerne. Underviseren kan så omdirigere eleven til at løse opgaverne på et andet niveau hvis eleven har fejlbedømt sig selv. Jeg beskriver de tre niveauer således:

- ***Niveau 1** er de elever der har mistet overblikket inden for emnet, og som ønsker større fordybelse inden de går videre. Her skal eleverne lære det minimum der kræves for at forstå næste emne*
- ***Niveau 2** er de elever der finder udfordring ved det almindelige niveau. Her skal eleverne lære alt det undervisningen normalt ville indeholde*
- ***Niveau 3** er de elever der finder den almindelige undervisning let, og som gerne vil have ekstra udfordringer. Her skal eleverne ud over det almindelige pensum udfordres med opgaver der skaber forståelse for sammenhænge der normalt ikke ville blive gennemgået*

Der er flere måder niveaudelingen kan bruges på. Opgaverne kan laves så de skal løses i trin. Dvs. først løses niveau 1, dernæst niveau 2, og til sidst evt. niveau 3. Fordelene ved denne metode er mange. Hvis ikke eleven og underviseren på forhånd ved hvilket niveau eleven befinder sig på, vil eleven altid få noget ud af opgaven ved selv at stå af, når udfordringen bliver for stor. En anden fordel er at eleverne ikke behøver blive sat ind i selve niveaudelingen. En anden fremgangsmåde er at starte opgaven på niveau 2, hvorfra der kan være mulighed for fordybelse i tre retninger afhængig af elevens niveau, og endelig kan opgaverne deles op i niveauer som eleverne vælger blandt fra starten.

Konsekvensen kan desværre blive at de elever der konsekvent befinder sig omkring niveau 1 kommer til at mangle dele af pensummet. Spørgsmålet er dog om det i praksis vil gøre nogen forskel. Hvis alle elever i dag var i stand til at forstå hele pensummet, ville der udelukkende have 12-tals elever i skolerne, hvilket ikke er tilfældet. Med denne kendsgerning taget i betragtning, mener jeg ikke det skader at de svageste 25% af eleverne kommer til at mangle de sværeste 25% af pensummet, hvis de til gengæld for en større forståelse for resten. Erkendes det at der er elever der ikke kan følge med den normale undervisning, kan underviseren handle herudfra ved som nævnt, at lade disse elever fordybe sig i en mindre del af pensum, og om muligt finde alternative indlæringsstrategier hvis det skønnes hensigtsmæssigt.

Niveaudelingen er tænkt dynamisk, på den måde at en elev godt kan være på et niveau i en opgave og på et andet niveau i en anden afhængig af elevens forståelse.

5.3 Undervisningsplan

Da der kan forekomme matematisk svage elever i en klasse, skal en intelligent undervisningsplan tage højde for hvilke dele af pensum der er vigtigst for den kommende undervisning, så de svage elever kan fokusere på dette.

Undervisningen i 1. gymnasieklasse skal være en naturlig forlængelse af det eleverne har lært i grundskolen. I SOS-projektet, som var et 3-årigt statsstøttes projekt om symbolbehandlingskompetence og sammenhængsproblemer i matematikundervisningen, finder Nielsen og Krægpøth (2007) ud af, at eleverne i grundskolen ikke opnår en symbolbehandlingskompetence og ræsonnementskompetence på højde med de øvrige matematiske kompetencer. De bemærker at eleverne fra grundskolen ikke har nogen nævneværdig dækningsgrad inden for de nævnte kompetencer, hvilket kan føre til undren hos gymnasieskolens matematikundervisere over, om eleverne overhovedet lærer noget matematik i grundskolen. Tilsvarende kan underviseren i fysik undre sig over om eleverne lærer noget i gymnasieskolens matematiktimer, hvis ikke eleverne har opnået en tilstrækkelig stor aktionsradius.

Hvis grundskolen ikke er opmærksom på at træne elevernes dækningsgrad inden for de to kompetencer, og gymnasieskolen ikke er opmærksomme på at eleverne ikke har arbejdet på opbyggelsen af disse kompetencer, kan det ikke vække undren at eleverne har svært ved f.eks. at reducere udtryk og isolere en variabel. Eleverne risikerer simpelthen at blive svigtet i den basale algebraiske træning. Som Nielsen og Krægpøth skriver (2007, s. 54), er det ikke nok med en "*kvik lille repetition*" den første uge i gymnasieskolen. Det er nødvendigt at sætte tid af til at arbejde med disse grundlæggende færdigheder, og

> *måske kan et øget fokus på variabelbegreb og symbolbehandlingskompetence være med til helt generelt at hæve alle elevers matematikniveau* (Nielsen & Krægpøth, 2007, s. 54).

Undervisningsplanen skal altså sørge for at tage over hvor grundskolen slap, så elevernes dækningsgrad bliver øget, og samtidig skal den stile fremad og sørge for at elevernes aktionsradius bliver øget så eleverne opdager, at de kan bruge deres matematiske viden inden for andre af gymnasieskolens fag, såvel som i livet uden for skolen.

5.4 Undervisning

I naturlig forlængelse af *lige ret* kommer undervisningen der, som nævnt skal tilpasses elevernes behov. For at kunne give hver elev den bedste undervisning, er det nødvendigt at vide hvor langt eleven er nået inden for den matematiske forståelse, og evt. afprøve flere forskellige strategier for at eleven kan opnå forståelse inden for emnet. Ellers er der risiko for, at emnet ikke giver mening for eleven. Hvis eleverne skal løse problemer, kan en diskussion omkring hvilke informationer der er givet, og evt. hvordan problemet kan forstås grafisk, være med til at optræne en symbolfornemmelse hos eleverne (Arcavi, 1994), ligesom en opsamlende diskussion efter eleverne har arbejdet med et problem, kan give anledning til at se sammenhænge mellem forskellige løsninger og repræsentationsformer. Disse diskussioner bør indbyde til "hvad nu hvis…" spørgsmål, da disse giver anledning til en bredere forståelse af sammenhænge (Arcavi, 1994).

Det er vigtigt at der er et formål med de opgaver eleverne skal arbejde med i undervisningen. Bell har udviklet en metode (Bell et al., 2004) han kalder DRM (the diagnostic and responsive method), hvor opgaverne skal designes så eleverne tvinges til at benytte bestemte strategier. Dette strider mod at eleverne skal have en opfattelse af at en opgave kan løses på flere måder (Schoenfeld, 1992), men har den fordel at eleverne tvinges til at benytte strategier de måske ellers ville være gået uden om, og dermed undgå huller i de relevante matematiske værktøjer. DRM består af tre faser. I første fase udforskes hovedkonceptet intensivt. Herunder indgår også eventuelle konflikter med konceptet, og om nødvendigt modstridende eksempler. Det kunne være at eleven har fået den opfattelse, at et produkt altid er større end faktorerne, eller at en division kun kan udføres hvis divisoren er mindre end dividenden. I anden fase skal konceptet generaliseres og navngives så det kan genkendes og inddrages i andre sammenhænge, mens der i tredje fase skal reflekteres over hvordan konceptet optræder i forskellige situationer, hvordan det benyttes, og hvilke fejlkilder eleven skal være opmærksom på kan indtræffe. Specifikke løsningsforslag og en opdeling af problemet i mindre delopgaver bør undgås. En lektion bør ifølge Bell bygges op efter følgende form (Bell et al., 2004, s. 135, egen oversættelse):

- *Hver lektion begynder med en opgave som kræver en af de ønskede strategier, og som diskuteres parvist af eleverne som hver især noterer deres ideer og løsninger*
- *Nu dannes der små grupper af elever der diskuterer og sammenligner strategier*
- *Endelig diskuteres strategier på hele klassen, og underviseren opsummerer, navngiver strategierne, og oplister de skridt der skal foretages*
- *Et nyt problem deles ud sammen med et skema med strategiske hints som eleverne nåede frem til i diskussionen. Eleverne arbejder først på dette parvist, og derefter enkeltvist*
- *Endelig indsamler underviseren mundtligt elevernes ideer, og kobler deres arbejde sammen med de strategiske hints*
- *Fremtidige lektioner behandler andre aspekter af strategien eller tilføjer det i en ny kontekst*

Når eleverne har brug for hjælp skal underviseren gerne bruge generelle hints som *”hvad har du prøvet?”, ”hvad tror du?”,* og mere sparsomt bruge hints som *”hvordan kan du organisere det?”, ”har du prøvet et simplere tilfælde?”* (Bell et al., 2004, s. 135). Polya (1945) argumenterer også for at bruge åbne gentagne spørgsmål for at få eleverne til at genkende spørgsmålene, og dermed give dem en chance for at begynde at stille sig selv disse spørgsmål med tiden. En hjælpeliste med spørgsmål til løsning af problemer kan ses i bilag 1 (s. 103). Metoden træner eleverne i problemløsning, og hvis strategien efterfølgende benyttes i en anden kontekst, optrænes elevernes fornemmelse for hvornår det er hensigtsmæssigt at tage strategien i brug.

Hvor DRM opstiller nogle rammer for hvordan forløbet skal foregå, har Romberg (1994, s. 301), opstillet fem principper for, hvordan indholdet af forløbene skal designes.

- *Først skal det bestemmes hvilke koncepter eleverne skal lære*
- *Hvert koncept skal arbejdes igennem, og skal hver fortælle en historie. Konflikt, mistanke, krise og løsning*
- *Ideer introduceres bedst hvis eleverne kan se et behov eller et formål med brugen heraf*
- *Aktiviteterne i hver gruppe skal stå mål med hvordan eleverne optager informationer*
- *Undervisningsplanen er en guideline, der skal fortælle om hvad eleverne skal arbejde med. Det skal ikke være en liste over beviser underviseren skal gennemgå*

Disse principper har en god sammenhæng med DRM, hvor der netop lægges op til at designe problemerne efter bestemte koncepter eleverne skal arbejde med, og hvor der nødvendigvis først skal bestemmes hvilke koncepter eleverne skal lære. Historieopbygningens tre faser gennemføres i DRM's første fase, hvor eleverne på egen hånd udforsker et problem. Underviseren spiller dog en vigtig rolle i denne fase, ved at stille eleven spørgsmål der skal skabe mistanker og kriser eleven skal gennemtænke. Anden fase i DRM generaliserer og navngiver nu konceptet så elevernes notation bliver standardiseret. Rombergs tredje princip om at eleverne skal kunne se et formål med konceptet, kan nu tages i brug ved at præsentere eleverne for flere relevante problemer hvor konceptet er anvendeligt. Hvis konceptet gør det muligt for eleverne selv at finde på flere anvendelser, er de allerede på vej over i DRM's tredje fase, hvor eleverne skal reflektere over konceptet, bl.a. gennem løsning af relaterede relevante problemer. Rombergs sidste to principper er dækket af NCTM's principper om lige ret, undervisning og indlæring.

Det kan dog ikke direkte siges, at den ene undervisningsform er bedre end den anden. Eleverne lærer det de bliver undervist i, da dette øger betingelserne for indlæring. Så hvis de bliver undervist i konceptuel forståelse vil de have større mulighed for at lære dette, end hvis de bliver undervist i færdigheder (Hiebert & Grouws, 2007). Hiebert og Grouws (2007) argumenterer for, at der ikke er nogen direkte sammenhæng mellem undervisning og indlæring. Indlæringen sker nemlig først, når eleverne begynder at tænke over de matematiske ideer, og undervisningen er kun en af de mange faktorer der spiller ind på elevens indlæring.

5.5 Indlæring

Hvis eleverne skal kunne bruge matematikken, bliver de nødt til at praktisere matematik ligesom basketball eller musik skal praktiseres hvis disse discipliner skal kunne udøves. Alternativt kan det godt lade sig gøre at danne sig viden om faget, men eleverne vil ikke være i stand til selv at udøve det (Romberg, 1994). Det er derfor vigtigt at eleverne forstår det de skal lære og ikke blot forsøger at huske alle de regler underviseren kommer med. Schoenfeld har lavet følgende liste over almindelige misforståelser af matematikkens formål (Schoenfeld, 1992, s. 69, egen oversættelse):

- *Matematiske problemer har præcis én løsning*
- *Der er kun én korrekt måde at løse et matematisk problem – typisk skal den regel som underviseren sidst har vist i klassen bruges*
- *Almindelige elever kan ikke forventes at forstå matematik, de skal bare huske, og bruge hvad de har lært mekanisk uden forståelse*
- *Matematik er en ensom aktivitet og skal ikke laves i fællesskab*
- *Elever der har forstået matematikken, vil være i stand til at løse enhver opgave de får, på maksimalt fem minutter*
- *Matematik har intet at gøre med den virkelige verden*
- *Beviserne kan ikke bruges aktivt i matematikken*

Disse problemer kan opstå af den didaktiske kontrakt som, ifølge Brousseau (Blomhøj, 1995), skabes mellem elever og underviser i enhver matematikundervisning. Den didaktiske kontrakt er ikke fast defineret, men indebærer traditionelt at underviseren gennemgår metoder og algoritmer, og sørger for at eleven har de nødvendige forudsætninger for at løse de stillede opgaver, mod at eleverne gør deres bedste for at løse de opgaver der bliver stillet. På den måde sikrer kontrakten at både elev og underviser lever op til deres forpligtelser i forbindelse med matematikundervisningen. Kontrakten er opbygget så eleven forsøger at leve op til underviserens krav om at løse opgaven, men ikke så eleven reflekterer over den matematik der ligger bag opgaven. Derfor finder indlæring ikke sted før kontrakten bliver brudt af eleven (Blomhøj, 1995).

For at få eleverne til at forstå matematikken og komme misforståelserne i listen til livs, er der bred enighed blandt matematiske didaktikere om, at problemløsning er en god metode at tillære sig matematisk viden, opfattelse og forståelse (f.eks. Schoenfeld, 1994a; Bell, 2004; Niss, 2007). Når eleven bliver præsenteret for problemer og opgaver der ikke er standardopgaver, tvinges eleven nemlig til selv at tænke over sammenhænge og løsningsstrategier. Lithner har analyseret en række svenske lærebogsopgaver, og fundet ud af at 70% af opgaverne kunne løses direkte ved at finde et eksempel i bogen, mens 20% kunne løses ved simple modificeringer af eksemplet, og at langt de fleste elever kun bruger matematisk ræsonnement når det ikke lykkedes at finde et eksempel der passer til opgaven (Balling, 2003).

Tvinges eleverne gennem problemløsning til at tænke over sammenhænge og løsningsstrategier, øges sandsynligheden for at eleven forstår sammenhængen i problemet, samt hvorfor forskellige metoder tages i brug. Det samme gør sig gældende hvis eleverne skal opstille matematiske modeller for kendte situationer. Burkhardt (Kieran, 2007, s. 726) mener modellering er en bro til at lære algebra, mens Michelsen (2001) ser at modellering kan skabe samspil mellem matematik og de øvrige naturvidenskabelige fag.

Mange elever forstår ikke de formler der bruges inden for matematik og fysik, og er usikre på hvad de forskellige variable står for. Hvis de i stedet selv er med til at udvikle formlerne eller løsningsmetoden, forstår de bedre tankerne og matematikken bag formlerne og kan meget bedre løse problemerne (Schoenfeld, 1994a). Algebra og symboler skal derfor introduceres med situationer eleverne kan forholde sig til. Det kunne være at finde ud af hvor mange der kan sidde ved et antal borde der er sat sammen i række når der kan sidde 2 personer på hver side af hvert bord, samt en person i hver ende af langbordet (Arcavi, 1994, s. 33), eller hvor mange byggeklodser der bruges til at bygge forskellige typer af trapper af en given højde (Bergsten, 2000, kap. 4).

Problemløsning i undervisningen er dog ikke uproblematisk. Undervisningsmaterialet er lavet til at kunne læses, og forhåbentligt forstås, fra ende til anden uden brug af papir og blyant, og er ikke målrettet til brug inden for problemløsning. Det betyder at underviseren skal tænke alternativt, og bruge en del ekstra tid på forberedelsen. Dette punkt kan løses ved at lave egnet undervisningsmateriale.

Det er en større udfordring for underviseren at undervise i problemløsning, end i traditionel undervisning. Burkhardt har opstillet tre områder og beskrevet hvor udfordringerne ligger når der undervises ved hjælp af problemløsning frem for den traditionelle undervisnings-form (Schoenfeld, 1992, s. 57, egen oversættelse):

- ***Matematisk*** *- skal underviseren se hvilke ideer der er brugbare, og hvordan ideer der ikke er brugbare kan udnyttes til at spore eleven ind på den rette vej*
- ***Pædagogisk*** *- skal underviseren overveje hvornår der skal gribes ind, og hvordan hver enkelt elev eller gruppe kan hjælpes på rette vej*
- ***Personligt*** *– kan der opstå situationer hvor underviseren ikke kender svaret, hvilket for nogle kan virke ubehageligt*

Matematisk og pædagogisk tror jeg ikke det vil kræve en uoverkommelig omstilling for underviseren. Det er dog klart at nye undervisningsmetoder kræver tilvænning, og at underviseren i starten kan foretage nogle fejldisponeringer, men at der med tiden vil blive længere mellem disse fejldisponeringer. Hvor stor betydning den personlige konsekvens vil have kan jeg ikke svare på, da det vil være meget individuelt. Den vil ikke kun afhænge af alder og erfaring, men også af underviserens personlige psyke og tiltro til sig selv og sin egen undervisning.

Det er relevant at spørge om ikke det tager længere tid at lade eleverne selv finde frem til regler og begreber, end at forære dem til eleverne, og fortælle hvordan de virker. Her skal der dog ses på hele forløbet. Det vil være naturligt at der er nogle ting der tager længere tid at indlære i starten af forløbet, men med en større forståelse, kan der spares tid i den anden ende. F.eks. viser erfaringer (Nielson, 2007) at hvis der bruges tid på at få variabelbegrebet på plads, bliver den fremtidige matematikundervisning både sjovere og lettere for eleverne. Herudover er der en mulighed for at springe hurtigt hen over enkelte sætninger hvis eleverne har en god baggrundsforståelse inden for emnet. På trods af disse fordele er der dog stadig risiko for, at det vil tage længere tid at komme gennem pensum ved hjælp af problemløsning.

At lade eleverne arbejde selvstændigt i små grupper med problemløsning er dog bestemt ikke nogen garanti for forståelse. Så længe der er tale om læring der uden komplikationer bygger oven på eksisterende viden, er der ingen problemer, men når der er tale om meta-læring, hvor den nye viden kommer i konflikt med tidligere viden, opstår problemerne. Ved meta-læring virker det som om gammel og ny viden er i modstrid med hinanden. På den måde skal tidligere opfattelser af sammenhænge revurderes, for at få den nye viden til at passe ind i det gamle bilede. Det er ikke noget der gøres velvilligt, og kun såfremt den nye metode fremstår mere anvendelig end den gamle. Eleven bliver først overbevist herom når eleven forsøger at ændre billedet, og få det nye til at passe ind. Eleven bliver derfor nødt til at få erfaringer med den nye viden og gennemleve konflikterne med sig selv. Hvis meta-læring i gruppearbejde skal gå godt kræver det (Ben-Zvi & Sfard, 2007):

- *At en i gruppen får den rigtige idé, og*
- *At den der får den rigtige idé er villig til at lære fra sig*

Med andre ord går det galt hvis

- *En i gruppen får en forkert idé som gruppen tror på, eller*
- *Der ikke er nogen i gruppen der får en idé, eller*
- *Der er en i gruppen der ikke får den fornødne hjælp til at forstå diskussionen*

Skal eleverne opnå meta-læring i selvstændige grupper, skal de derfor guides meget nøje for at undgå fiasko.

5.6 Evaluering

Evalueringen er vigtig for at kunne give den rette undervisning, da det er en forudsætning for den videre undervisning at underviseren ved hvad eleven kan og ikke kan. Hvis det løbende skal sikres, at eleven har opnået forståelse for emnet, bliver evalueringen nødt til at foregå løbende så både underviseren og eleven ved om eleven har opnået den rette forståelse, og hvad der skal fokuseres på i indlæringsprocessen. Evaluering er således ikke blot et middel til at give eleven en endelig karakter, men skal bruges aktivt til at optimere undervisningen og give eleven klar besked om hvorvidt den rette forståelse er opnået.

Evaluering vil blive diskuteret i kapitel 6 (s. 41), som er specialerapportens sidste teoriafsnit.

5.7 Teknologi

I dette afsnit vil jeg bl.a. nævne en række programmer der ikke er almindeligt kendte. Internetadresser og billedeksempler fra disse programmer er at finde i bilag 2 (s. 105).

Teknologiske hjælpemidler har flere anvendelsesmuligheder. Den mest oplagte er almindelig anvendelse af grafregner og matematikprogrammer til brug ved udregninger herunder numeriske løsninger, grafiske afbildninger, regressioner m.v., hvilket også er et krav fra undervisningsministeriet side, og uundværlig hvis hjælpemiddelkompetencen skal opøves til et tilstrækkeligt niveau. Herudover er teknologiske hjælpemidler brugbare til at tjekke op på resultater og beregninger. Men der er også mange anvendelsesmuligheder for teknologiske hjælpemidler som led i en læringsproces. Elever der bruger grafregnere regelmæssigt gennem deres undervisningsforløb får en bedre forståelse af funktioner (Kieran, 2007) og kan med grafregneren koncentrere sig om problemløsning frem for beregninger (Balling, 2003). Ligeledes kan regneark benyttes til at skabe forståelse for funktionsbegrebet, ved at lade første kolonne bestå af uberørte tal herefter kaldet værdier, og lade anden kolonne være en funktion af første kolonne. På den måde kan eleverne se hvad der sker når funktionen tages på en værdi. Hvis eleven selv får lov til at vælge hvilke værdier funktionen skal tages på, finder eleven ud af om der er værdier der er smarte at bruge for at bestemme funktionen, og eleven kan gætte på hvad funktionen gør ved værdierne. Efter at have bestemt funktionen kan eleven beregne nogle ikke afprøvede talsæt, og se om de passer ind i funktionen. Kieran (1992) har fundet ud af at denne leg er god for elever der skal introduceres til funktionsbegrebet, og at mere erfarne elever foretrækker at der er tilknyttet en grafisk afbildning af funktionen. Arcavi (1994) foreslår at øvelser i at gætte på forskriften for en grafisk afbildning kan være med til at styrke symbolfornemmelsen.

En variant af ”*gæt en funktion”* fås i programmet ”Sequences”, hvor eleven ud fra en talfølge skal regne fortsættelsen ud, og opskrive en regel for talfølgen på formen $an + b$. Det er dermed meningen at der hos eleven skal opstå en forståelse for den lineære udvikling.

Når funktioners egenskaber skal forstås, kan det være meget anvendeligt at se på den grafiske afbildning af forskellige funktioner. Ved hjælp af computerprogrammer kan eleverne selv lege med at ændre parametrene for funktionsudtryk for funktioner i samme familie, og de kan derved eksperimentalt opdage sammenhængen mellem funktionsudtrykket og den grafiske afbildning. Herefter kan eleverne se på hvorfor graferne opfører sig som de gør. Til formålet kan bruges en almindelig grafregner, eller eleverne kan f.eks. bruge programmet graphmatica, der bibeholder alle tegnede grafer så de lettere kan se hvad der sker ved en ændring af forskellige parametre.

Til at skabe forståelse for lighedsbegrebet kan programmet ”Expression Balance” fra NCTM benyttes. Her kan eleven ”lægge” funktionsudtryk på en vægtstang, og se hvornår der er ligevægt. Samtidig med at vægtstangen vipper op og ned for forskellige værdier, kan den grafiske afbildning af funktionsværdien følges.

Endelig kan programmer også bruges til at træne færdigheder. Hertil vil jeg fremhæve et lille program af Boon, hvor 20 forskellige ligninger af formen $ax + b = cx + d$ skal løses ved at udføre samme handling på begge sider af lighedstegnet.

En del af de matematiske færdigheder kan dermed opøves og trænes ved hjælp af computerprogrammer, og med lidt kreativitet kan nogle af disse programmer laves om til et spil. Et eksempel herpå er ”Algebra vs. the cockroaches”, hvor spilleren skal nå at indtaste ligningen for den rette linje som et stigende antal kakerlakker følger, før kakerlakkerne har formeret sig tilstrækkeligt til at få overtaget. Spillet forløber i runder med stigende sværhedsgrad, der skal motivere eleven til at kæmpe lidt mere for at finde den rette ligning.

Teknologiske hjælpemidler kan selvfølgelig også benyttes som appetitvækker eller motivation, ved at finde fraktaler, geometriske animerede figurer og anvendelsesmuligheder eleverne kan stræbe efter at eftergøre eller manipulere.

5.8 Hvis principperne overholdes, er undervisningen da tilfredsstillende?

Formålet med undervisningen er at alle elever skal forstå matematikken, så den kan bruges i enhver sammenhæng det måtte være hensigtsmæssigt. Herunder ligger der at alle eleverne skal have opnået den tilstrækkelige viden inden for matematik, hvor ”tilstrækkeligt” defineres ud fra undervisningsministeriets læreplan for den enkelte uddannelse og klassetrin, samt at de skal være i stand til at forstå og benytte deres viden bredt, hvorved de faglige mål bliver opfyldt. Spørgsmålet er derfor, om dette er opfyldt, hvis blot principperne er overholdt.

Med princippet om undervisningsplanen, skal undervisningen være tilrettelagt således, at de ønskede matematiske emner for klassen kan behandles. Undervisningsministeriet har med deres læreplaner allerede lavet det meste af dette arbejde for at sikre et minimum af matematisk stof der skal behandles i undervisningen, og har med kernestoffet defineret en del af de emner der ønskes behandlet. Herudover kan den enkelte underviser definere flere emner der skal behandles, men det ændrer ikke ved at undervisningsplanen sikrer at de tilstrækkelige emner inden for matematikken behandles når princippet af undervisningsplanen er opfyldt. Hvis undervisningsplanen følges, hvis eleverne følger med i undervisningen, og hvis evalueringsprincippet sammen med undervisningsprincippet indebærer, at der bliver fulgt op på det eleverne ikke har nået, må eleverne derfor opnå den nødvendige viden, hvilket dog ikke er ensbetydende med, at eleverne har fået forståelse for emnet.

Indlæringsprincippet bygger på at eleverne ikke blot skal lære, men at de skal forstå alle dele af matematikken. Sammenholdes dette med princippet om lige ret, evalueringsprincippet og undervisningsprincippet, sikres at alle elever arbejder efter størst mulig forståelse på egne præmisser. Spørgsmålet er nu om forståelse for matematikken indebærer, at eleven også kan bruge sin viden bredt.

Selv om eleven har lært matematikken gennem problemløsning er det ikke ensbetydende med, at eleven overvejer at benytte sin viden uden for matematiktimerne. Under formålet i undervisningsministeriets læreplaner (UVM, 2008) står der for STX bl.a. at eleverne skal

> *opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi*

for HTX står der bl.a. at eleverne skal kunne

> *forstå, analysere og træffe beslutninger i komplekse systemer i såvel samfunds- erhvervs- som studiemæssige sammenhænge*

og for HHX står bl.a. at

> *eleverne skal opnå forståelse af matematikkens rolle i samfundet, herunder have kendskab til faglige metoder og tankeganges betydning for samfundsudviklingen*

og kunne

> *forholde sig til og forstå den øgede matematisering af samfundet samt medvirke til den fortsatte udvikling af samfundet*.

Vigtigheden af at eleverne opnår kendskab og forståelse for hvilken rolle matematikken har i andre fag, og ude i samfundet, er ikke til at tage fejl af når de korte formål læses. Skal det sikres at eleverne får kendskab til matematikken i samfundet, og får en fornuftig dæknings-grad inden for de matematiske kompetencer, er det derfor vigtigt, at det bliver lagt ind i undervisningsplanen.

Under forudsætning af at undervisningsplanen er lavet hensigtsmæssigt, vil jeg derfor slutte at undervisningen er tilstrækkelig, hvis NCTM's seks principper overholdes.

I dette kapitel har jeg ikke blot argumenteret for, at NCTM's principper vil danne en god ramme om den danske matematikundervisning. Jeg har set:

- *At det kan være anvendeligt at niveaudele eleverne, hvis læring skal ske på elevens præmisser*
- *Vigtigheden i at eleverne lærer at benytte algebraen i forskellige kontekster, for at gøre den nyttig uden for matematikundervisningen*
- *DRM princippet, hvor eleverne først arbejder med et nyt koncept i små grupper. Herefter diskuteres resultater på klassen, og koncepterne navngives, og endelig skal eleverne udforske konceptet videre på egen hånd*
- *Hvordan et undervisningsforløb kan designes ud fra Rombergs fem principper, og at indlæring først finder sted når eleverne selv tænker over de matematiske ideer uafhængig af undervisningen*
- *At problemløsning kan være en god ramme for at få eleverne til at tænke over disse ideer, og at det vil være en fordel at få udarbejdet egnet undervisningsmateriale til formålet*
- *At succes med at opnå meta-læring under gruppearbejde forudsætter, at grupperne guides meget nøje*
- *At evaluering bør ske løbende til gavn for både underviseren og eleven*
- *At teknologi kan være et nyttigt pædagogisk værktøj til at forstå matematiske koncepter*

I næste kapitel vil jeg diskutere hvordan der sikres en sammenhæng mellem hvad der bliver undervist i og hvad eleverne lærer.

6 Hvordan sikres det at eleverne har lært hvad de skal lære?

Evaluering er et større emne i sig selv, og en ud af NCTM's seks principper. I dette kapitel vil jeg diskutere relevansen af evalueringen, samt hvordan evalueringen af eleverne kan foregå.

Når eleverne undervises i forskellige emner inden for matematikken, skal det som tidligere nævnt kunne anvendes både i matematikundervisningen og i andre sammenhænge. Selv om matematikken primært skal læres for at kunne anvendes i andre sammenhænge, er det lige så vigtigt at eleverne har forstået matematikken for at kunne anvende den senere i matematikundervisningen. Det kan lyde modstridende med at eleverne ikke skal lære matematikken for skolens skyld, og det er det i princippet også, men da det eleverne undervises i, oftest skal bruges til at forstå de næste emner i matematikken, mangler eleverne grundlaget for at forstå det videre forløb, og vil således være sat af løbet hvis de i tidligere emner ikke har opnået den tilstrækkelige forståelse. Så hvis eleverne skal lære mere avanceret matematik til brug uden for matematiktimerne, skal de også lære matematik for matematikkens skyld, og således bliver de nødt til at lære både for skolen og for livet.

Det er derfor ikke nok at evaluere eleverne til eksamenen for at se om de har opnået den tilstrækkelige viden. Denne evaluering bliver nødt til at foregå løbende, ja nærmest kontinuerligt, for at eleven kan fokusere på koncepter der er svære for eleven samt eventuelle misforståelser. Det kan gøres gennem elevens aktive deltagelse i klassediskussioner, eller ved at underviseren hjælper eleven under det selvstændige arbejde. Dette er ikke muligt ved envejskommunikation fra underviser til elev. Derfor bør forelæsning uden elevaktivitet ikke finde sted i større udstrækning. Evaluering kan også foregå gennem skriftlige afleveringer hvor eleven forklarer de vigtigste punkter inden for emnet. Visse opgaver kan også vise om eleven har opnået forståelse, dog er aflevering af skriftlige opgaver ofte bedre egnet til at vurdere elevens færdigheder frem for forståelse.

Hvis jeg definerer personlig evaluering som en mundtlig samtale mellem underviser og elev omkring elevens forståelse af de matematiske koncepter eleven arbejder med, stiller jeg mig tvivlende overfor, om personlig evaluering kan foregå løbende for hver enkelt elev, når der er 20-30 elever i en klasse.

Hvis det, på grund af det store antal elever i klassen, ikke kan lade sig gøre at underviseren personligt evaluerer hver elev, vil det være en oplagt mulighed, at evaluere eleverne elektronisk. Det kræver dog et elektronisk værktøj der automatisk kan fortælle eleven og underviseren, om eleven har løst dagens opgaver korrekt. Statistik over besvarelserne vil kunne skabe overblik over elevens progression og motivere eleven til at forbedre egne resultater. Hvis ikke dette skal blive en uoverkommelig opgave for underviseren, vil en database med relevante opgaver ligeledes være en nødvendighed. Alternativt kan eleverne evaluere hinanden i mindre grupper. Denne mulighed udstiller dog eleverne for hinanden, og kræver at der er elever i hver gruppe der har opnået en tilstrækkelig forståelse til at vurdere de øvrige elevers kundskaber. Er det ikke en mulighed at lave klasserne mindre, er der også muligheden for, gennem hjemmeopgaver, at lade evalueringen være op til eleven selv. Det er dog vanskeligt for underviseren at få et realistisk billede af elevernes kundskaber, hvis evalueringen er overladt til eleverne selv.

Som skrevet under NCTM's principper er det vigtigt at både underviser og elev ved hvad eleven kan og ikke kan. Dette gør sig også gældende i det tilfælde hvor der ikke er afsat mere tid til at arbejde med et emne. For eleven giver det mening at vide hvilke dele af emnet der er forstået korrekt, og hvilke huller eleven har i emnet. Herved har eleven mulighed for på egen hånd at rådføre sig med de øvrige elever og hvor eleven ellers henter hjælp til sine lektier. Det er ligeledes vigtigt for underviseren at vide hvilke huller eleverne har i pensummet, da det således vil være lettere at fange og undgå forståelsesmæssige problemer i de efterfølgende emner.

Når elevens forståelse skal evalueres, er det vigtigt, at underviseren lytter til hvad eleven siger, så eleven ikke evalueres ud fra hvad underviseren tror eleven mener. Underviseren skal også holde øje med hvilken af metoderne fra Kierans liste omtalt på side 24, eleven bruger til at finde løsningen på et algebraisk problem, hvis det er hensigten at træne eleven i brugen af en bestemt teknik. Hvis eleven har set at gættemetoden virker og holder fast i den metode, risikeres det at eleven ikke trænes i det ønskede, og dermed kommer til at mangle færdigheder i nogle af metoderne længere nede på listen, som f.eks. den formelle metode.

Jeg er i dette kapitel kommet frem til, at løbende evaluering af elevernes færdigheder og kundskaber er relevant uafhængig af om der er afsat tid til at rette op på koncepter eleven ikke forstår. Jeg har herudover stillet spørgsmål ved, om løbende evaluering mellem underviser og elev kan lade sig gøre i klasser med mange elever og foreslået nogle muligheder for alternativ evaluering. Da jeg mener eleven bedst evalueres ved personlig kontakt, vil jeg under de empiriske undersøgelser notere mig om denne evaluering vil lykkedes. Specialeopgavens teoridel slutter her. I næste kapitel vil jeg diskutere de overordnede rammer for undervisningsforløbet til de empiriske undersøgelser.

7 Metode til udarbejdelsen af undervisningsforløbet

I dette kapitel vil jeg beskrive nogle af de tanker der ligger bag de valg jeg har truffet under udarbejdelsen af undervisningsmaterialet.

Ud fra omfanget af de artikler jeg har stiftet bekendtskab med, kan jeg konkludere at der siden 1990 har været stor fokus på elevernes læringsvanskeligheder i matematik, og jeg har erfaret, at de omtalte problemer stadig er relevante. Jeg kunne vælge, at lave yderligere observationer af elevernes læringsvanskeligheder med algebra, men Schoenfeld mener (Michelsen, 2010) at forskningen på feltet har udviklet sig så langt den kan uden direkte indblanding. Har han ret i denne påstand, vil forbedring af undervisningen kræve, at jeg afprøver mine ideer i praksis, og noterer erfaringerne herfra, frem for at lave uprøvede teorier om undervisningsforløb baseret på observationer alene. Ved at designe undervisningsforløbet vil jeg være i stand til løbende at vurdere effekten af forløbet og foretage justeringer. Det optimale ville være efterfølgende at redesigne forløbet og lave nye empiriske undersøgelser. Desværre tillader tidsgrænsen for specialearbejdet ikke dette. Freudenthal mener (Michelsen, 2010) at udvikling af undervisningsforløb, og forskning heri, bør foregå cyklisk, hvor erfaringer fører til ændringer og nye erfaringer.

Når undervisningsforløbet skal designes skal jeg ifølge Brousseau (Balling, 2003) omdanne de matematiske koncepter fra ideer til illustrationer og verbale forklaringer. Herfra skal eleven så gendanne de matematiske ideer. Der er tradition for at matematikken efter udviklingen bliver forenklet så resultaterne fremstår simplere (Carter, 2008; Michelsen, 2004). Prisen herfor er at eleverne og underviseren selv skal danne billeder af matematikken bag sætningerne, eller at eleverne står uforstående overfor hvorfor underviseren eller lærebogen pludselig finder på at bruge de smarte tricks i beviserne, som f.eks. at lægge en størrelse til et udtryk, for derefter at trække det samme fra igen: Et eksempel herpå er når kædereglen under differentialregning skal bevises, hvor det er smart at bruge dette trick med størrelsen $f(x)g(x+h)$. Jeg skrev tidligere at eleverne har svært ved at forstå hvilke regler der gælder i algebraen, hvis de forklares alene ud fra algebra. Derfor vil jeg tilstræbe at give eleverne forklaringer på algebraen ved hjælp af matematik der ligger uden for algebraen.

Underviseren skaber med undervisningsmaterialet og sin egen formidling en didaktisk situation. Herunder lærer eleven ifølge Brousseau (Balling, 2003) dog ikke noget. Eleven er nødsaget til at arbejde selvstændigt for at genskabe og lære matematikken. I så fald skabes en adidaktisk situation hvor underviseren ikke længere har kontrol over situationen. Som nævnt i kapitel 5.5 (s. 33), skal eleven med andre ord bryde den didaktiske kontrakt, og reflektere over de koncepter der indgår i opgaven, før indlæring finder sted.

Jeg vil i designfasen af undervisningsforløbet bestræbe mig på at følge Rombergs fem principper for hvordan et undervisningsforløb skal designes, så der under forløbet er mulighed for at følge DRM (metoden og principperne findes i kap. 5.4, hhv. s. 30 & 32). Samtidig vil jeg lægge stor vægt på, at visualisere de algebraiske koncepter jeg har valgt, og lade eleverne opnå forståelse gennem problemløsning. Jeg har således bestemt at eleverne inden for den basale algebra skal arbejde med forståelse inden for ligningsløsning og reducering. Herunder skal eleverne have en klar strukturel opfattelse af lighedstegnet, som en relation mellem størrelser, frem for en operator der skal udføre en handling. Med denne opfattelse, skal eleverne opnå forståelse for den formelle metode, hvor samme handling foretages på begge sider af lighedstegnet.

Da jeg påbegyndte mit specialearbejde, var det min opfattelse, at elevernes problemer med regneartернes hierarki, var en vigtig nøgle til at blive bedre til den basale algebra. Det er stadig min opfattelse at det er vigtigt for eleverne at have styr på hierarkiet, men da det ikke er oplagt at problemsløse over definitionen af hierarkiet, har jeg valgt at lade hierarkiet stå uden for forløbet, så underviseren selv kan bestemme hvor meget der skal gøres ud af emnet.

Jeg er så heldig at jeg selv har fået to 1. gymnasieklasser i august 2009, hvorpå forløbet skal afprøves. Jeg indtager her både rollen som underviser og observatør, og vil i den forbindelse med elevernes accept, tage videoudstyr i brug da jeg ikke har mulighed for løbende at tage notater under min egen undervisning. Herudover har et par af mine kolleger vist interesse for at afprøve dele af mit forløb. Jeg har i den forbindelse ladet det være op til underviseren selv at vurdere, hvilke temaer der skal afprøves, og hvordan undervisningen skal foregå. Vi har dog indgået et samarbejde ved at jeg har fortalt hvad formålet med temaerne er og hvordan jeg forestiller mig forløbet skal foregå. Mine kolleger vil herudover løbende blive informeret om temaernes effekt, efterhånden som de bliver afprøvet i klasserne. I situationen hvor en af mine kolleger lader sine elever arbejde med et af temaerne, kan jeg alene koncentrere mig om rollen som observatør.

Jeg har i dette kapitel argumenteret for valget af selv at designe undervisningsforløbet, og ridset de vigtigste linjer for undervisningsforløbet op. Det er således målet at eleverne skal opnå en strukturel fornemmelse for algebraen, og herigennem en bedre symbolfornemmelse og forståelse. Inden jeg beskriver undervisningsforløbet, vil jeg i næste kapitel analysere fire eksisterende lærebøger til gymnasiets matematikundervisning i den basale algebra.

8 Lærebogsanalyse

For at finde egnet materiale til undervisningsforløbet har jeg fundet det relevant at analysere eksisterende lærebogsmateriale inden selve designfasen. I dette kapitel ser jeg derfor nærmere på fire lærebøger til matematikundervisningen i 1. gymnasieklasse. I litteraturlisten vil lærebøgerne være samlet i delkapitlet *Undervisningsmateriale*.

Når valget falder på en lærebog der skal anvendes i matematikundervisningen, bygger valget på mange faktorer herunder de økonomiske muligheder. I mit tilfælde hvor jeg er kommet som ny underviser på skolen, er valget allerede truffet for mig, eller begrænser sig til et meget lille udvalg af lærebøger som skolen ligger inde med. På teknisk gymnasium i Odense, havde jeg f.eks. muligheden for at vælge mellem Carstensens og Frandsens (1997a) bogserie, eller Jensen og Marthinus (2006), som er Carstensen og Frandsens nyere serie der er omskrevet til brug i HTX.

Da jeg må erkende at der findes andre lærebøger, end dem Odense Tekniske Gymnasium ligger inde med i klassesæt, vil jeg se på yderligere to lærebøger. Den første af disse er Madsen (1995). Den anden er Jessen Møller og Mørk (1997).

Skal jeg kunne bruge en af lærebøgerne til dette projekt, er kravet at eleverne skal kunne forstå matematikken ud fra eksperimentelle øvelser.

8.1 MAT 1

Carstensen og Frandsen (1997a) lægger ikke op til at eleven skal tænke over hvorfor regnereglerne gælder, og kommer ikke selv med forklaring på reglerne. Et eksempel herpå er, at eleven lærer at "gange over kors" (s. 43) hvis en lighed består af to brøker. Eleven bliver ikke bedt om at tænke over hvorfor denne metode virker, men forventes blot at acceptere og anvende metoden. Problemet heri skulle på nuværende tidspunkt være indlysende, hvis det forudsættes at elevernes først og fremmest skal forstå matematikken. Følges Rombergs tese om at eleverne skal være udøvere af matematikken (se s. 33), har eleverne rig mulighed for selv at komme frem til denne algebraiske genvej, gennem arbejde med de algebraiske færdigheder. Jeg ser derfor ingen grund til at undervise eleverne i at gange over kors. Hvis der ses bort fra bogens grå sider, hvor eleven har mulighed for at se på nogle spændende områder af matematikken der går ud over kernestoffet, er bogen præget af at være en teoribog hvor eleven kan hente teorien, og arbejde med denne gennem opgaverne i opgavebogen (Carstensen & Frandsen, 1997b). Det kreative aspekt er derfor henvist til opgavebogen der består af både rene regnestykker og sprogligt formulerede opgaver. Der er dog også få opgaver hvor eleven ikke på forhånd har set et eksempel på hvordan opgaven skal løses, og derfor selv får lov til at tænke over sammenhænge. Her tænker jeg på følgende opgaver:

Opgave 160: Vis, at vis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, så er $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

Opgave 162: To brøker er lig med hinanden: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, og desuden er a < b og c > d. Angiv to sådanne brøker.

Samt opgave 161 og 163 hvor eleven ud fra en geometrisk illustration skal gøre rede for første og tredje kvadratsætning.

Herudover er det kun opgave 422 og 423, som omhandler regneregler med rødder, der arbejder med forståelsen af regneregler og metoder inden for det afgrænsede område dette arbejde omhandler.

Opgave 160 er for svær for langt størstedelen af eleverne i 1. gymnasieklasse. Kun tre af mine dygtigste elever kom med bud på løsningen af opgaven, de fik som en udfordrende hjemmeopgave. Jeg vender tilbage til deres løsningsforslag på side 90.

Hvis ikke eleverne umiddelbart kan se at opgave 162 ikke har nogle løsninger med mindre a og c er nul, vil de måske opnå en større forståelse for brøker ved at forsøge sig frem med nogle tal.

For at yde Carstensen og Frandsen retfærdighed, vil jeg dog nævne at under ligninger har Carstensen og Frandsen (1997b) et forløb af opgaver (352) der skal guide eleven frem til, og gennem, udledning af løsningen til andengradsligningen, og at der under bogens historiske kapitel er opgaver hvor eleven ud fra en geometrisk illustration skal vise den anden kvadratsætning $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ (opg. 718), ligheden $a^2 - b^2 = (a-b)a + (a-b)b$ (opg. 719) samt $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (opg. 720).

Jeg finder således ikke Carstensen og Frandsen (1997a) velegnet som basis for et forløb, hvor eleverne guides frem til selv at udvikle de algebraiske koncepter. Som supplement til et sådant forløb, giver bogen dog klare definitioner, samt gode standardopgaver i opgavebogen (Carstensen & Frandsen, 1997b).

8.2 MAT B1 - HTX

Jensen og Marthinus (2006) giver heller ingen forklaring på regnereglerne under tal- og bogstavregning hvor regnearternes hierarki, brøker, potenser, rødder og kvadratsætningerne gennemgås. Det forventes således at eleven accepterer bogstavregning og tilhørende regneregler uden at stille spørgsmål om det er rigtigt hvad der står i bogen. I kapitel 2 om ligheder kommer bogen med vægtskåle på en balancestang som eksempel på ligheder (s. 40). Herudfra forklares at når noget gøres ved indholdet i den ene skål, skal der gøres det tilsvarende i den anden skål for at opretholde balancen. Men allerede i det næste eksempel bliver læseren introduceret for ligningsløsning ved hjælp af flytteregler, som resten af kapitlet er bygget op omkring. Bogen leder således frem til reglerne:

> *Et led flyttes fra den ene side af lighedstegnet til den anden side ved at skifte fortegn på leddet* (Jensen og Marthinus, 2006, s. 41)

Og

> *man kan 'gange over kors', dvs. hvis højre og venstre side af lighedstegnet er brøker, kan vi skrive* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (Jensen og Marthinus, 2006, s. 42).

Allerede i indledningen belæres der om problemstillinger hvori

> *der indgår nogle størrelser i en sammenhæng. Hvis en af størrelserne er ubekendt og de andre bekendte, kan man ved ombytning af størrelserne finde frem til et udtryk (en formel) for den ubekendte* (Jensen og Marthinus, 2006, s. 38).

Som jeg har skrevet tidligere, består problemet i at ikke alle elever forstår hvorfor flyttereglerne gælder, hvormed flyttereglerne er med til at mystificere algebraens regler, hvilket bevirker at eleverne ikke er i stand til at løse algebraiske problemer de ikke tidligere er blevet præsenteret for. Hvis eleverne skal benytte sig af flyttereglerne, skal de derfor selv komme frem til denne tankegang, og da kan flyttereglerne bidrage til større overblik i ligningsløsningen. Helt galt går det i eksempel 4 (Jensen og Marthinus, 2006, s. 43):

> *Vi løser ligningen:* $5 \cdot x + 4 = 16 - x$
>
> *Led, der indeholder* x*, samles fx på venstre side.* x *har fortegnet minus, der skifter til plus, ved flytningen:* $5 \cdot x + x + 4 = 16 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 4 = 16$
>
> *Øvrige led samles på højre side:* $6 \cdot x + 4 = 16 \Leftrightarrow 6 \cdot x = 12$
>
> *Nu er der kun et led på hver side. For at* x *kan isoleres, skal 6, der står som "gange", flyttes over som "dividere"* $x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$
>
> *Et tal der står som "gange" foran* x*, kaldes en koefficient til* x*.*

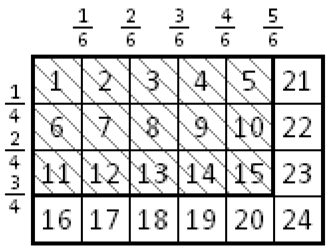
Den matematisk korrekte formulering er, at gøre det samme på begge sider af lighedstegnet, og at isolere x ved at få x til at stå alene på den ene side af lighedstegnet, således at der ikke indgår noget x på den anden side.

I bogens forord ses at der er tilknyttet en hjemmeside http://mat.systime.dk til bogen med diverse ekstra materiale. Ligesom jeg ikke kan dømme Carstensen og Frandsen på teoribogen alene, må jeg nødvendigvis også se om denne hjemmeside skulle være det guldkorn jeg har søgt efter, og som kan hjælpe eleverne til forståelse af ligningsløsning. Her fandt jeg bl.a. frem til en række videoer (Jensen & Martinus, 2009), men kan konkludere at den eneste fordel er, at eleven kan få regnereglerne fra et andet medie. Jeg vil ikke lave en større analyse af hjemmesiden, men nøjes med at drage en parallel til bogens brug af flytteregler ved at henvise til video nr. 05 *Ligninger af første grad*, hvor forelæseren sidst i videoen skal vise at $2x + 3 = 2x - 1$ ikke har nogen løsning. Han siger bl.a.:

> *Jeg samler x'erne på samme side. Der stod 2x i forvejen og de plus 2x bliver til minus 2x ved at trække dem fra på begge sider af lighedstegnet. Der var minus 1 i forvejen og jeg trækker 3 fra på begge sider, så plus 3 bliver til minus 3.*

Nu skal en video jo både høres og ses, og selvom forelæseren er meget påpasselig med at sige, at han gør det samme på begge sider af lighedstegnet, bevæger han samtidig sin pegefinger i en bue fra den ene side til den anden som om han følger noget der bliver flyttet. Dette understreger han med f.eks. at sige, at *2x bliver til minus 2x*. Forelæseren forklarer i begyndelsen af videoen at måden hvorpå ligninger løses, er at gøre det samme på begge sider, men han foretrækker at benytte flyttemetoden, og vælger derfor at blande den formelle metode sammen med flyttemetoden, hvilket ikke øger forståelsen. Da jeg ønsker at arbejde med forståelsen af algebraiske manipulationer frem for algoritmiske regler, har jeg på grund af bogens brug af flytteregler, ingen interesse i at eleverne skal se denne bog inden eller under forløbet.

8.3 Teknisk matematik



Figur 3

Blandt de to lærebøger jeg ikke havde til min rådighed, har jeg først valgt at fremhæve Madsen (1995), som ikke er helt ny længere, men er skrevet specifikt til de tekniske uddannelser herunder HTX. Madsen forklarer hvordan toleddede størrelser multipliceres med tal eller andre toleddede størrelser ved hjælp af geometriske illustrationer. Denne bevisform har været anvendt siden algebraens begyndelse, og det geniale heri er, at hvis eleven har accepteret at rektanglets areal svarer til længde gange højde, er det rimeligt klart ud fra de geometriske illustrationer, at de tilhørende algebraiske regneregler gælder. Eleverne får også selv lov til at tegne en figur der skal illustrere, at $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ (opg. 15, s. 24). Hvordan to brøker multipliceres illustrerer Madsen (s. 31) ved hjælp af figur 3 herover. Der er således flere gode illustrationer der forklarer algebraiske regler, selv om Madsen ikke illustrerer flere brøkregneregler end multiplikation. Til brug ved opgaver hvor startbetingelserne er angivet i decimaltal, som det ofte er gældende ved sproglige eller tekniske opgaver, illustrerer Madsen med et praktisk eksempel i kapitel 2, hvor nøjagtigt resultaterne bør angives. I Polyas sidste punkt i løsningsstrategien til problemløsning (se bilag 1, s. 103), hvor resultatet skal vurderes, falder overvejelsen over resultatets nøjagtighed naturligt ind. Selvom Madsen ikke undlader at fortælle om "flyttereglerne" ved ligningsløsning, har bogen derfor nogle elementer jeg finder brugbare i designet af undervisningsforløbet.

8.4 Tal, geometri og funktioner

Den sidste lærebog jeg vil fremhæve er den jeg personligt finder mest spændende, nemlig Jessen, Møller og Mørk (1997). I bogens indledning illustreres gennem øvelser og forklaringer, matematikkens relevans for at forstå naturen, for deltagelse i samfundsdebatten og for at løse simple problemer i dagligdagen. Ligeledes illustreres her hvor vigtigt der er at være kritisk over for andres brug af matematik, da forskellige fremstillinger kan få fænomener til at synes forskellige, og at det kan være svært at gennemskue andres fejlberegninger. Netop bogens eksempler med fejlberegninger der giver overraskende resultater, tror jeg vil pirre elevernes nysgerrighed til at finde den rigtige beregningsmetode.

Jessen, Møller og Mørk forklarer ud fra tallinjen hvordan en brøk kan opfattes, og fortsætter med at forklare brøkregnereglerne ud fra samme tallinje. Potensregnereglerne bliver forklaret algebraisk, mens negative og rationelle eksponenter forklares ud fra sildebensdiagrammer med eksponenten *"n"* i øverste række og potensen *"2^n"* i nederste række svarende til figur 4 herunder.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n					$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$

Figur 4

Således ses at potensen forstørres med en faktor 2 hver gang eksponenten vokser med 1. Som ved tallinjen er det ikke kun muligt at bevæge sig fremad, men også tilbage til nul, og til de negative tal. I dette tilfælde sker det ved at dele med 2 hver gang eksponenten falder med 1. Tilsvarende forklares hvordan potensen skal forstås hvis eksponenten er en halv eller en tredjedel, og hvordan disse størrelser derfor kan forstås som kvadratrødder og kubikrødder. Gennem øvelser bliver eleverne bedt om at vise de to sidste kvadratsætninger algebraisk (ø. 22, s. 44), samt ud fra potensregnereglerne at vise, hvilke af følgende regneregler der er gyldige: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

(ø. 33, s. 50). Bogen indeholder et afsnit om ligninger, hvor eleven gennem øvelser skal se på hvad udsagn og ligninger er, samt opnå forståelse for forskellen på "*og*" og "*eller*". Der gives i kapitlet ingen eksempler på hvad ligninger kan bruges til i praksis. Bogens stærke side er dens forsøg på at få eleven motiveret til at reflektere over matematikken. Konsekvent brug af tallinjen giver et trygt og genkendeligt udgangspunkt for tilgangen til nye koncepter.

Jeg har i dette kapitel analyseret relevante kapitler i fire forskellige lærebøger. Jeg er kommet frem til at ingen af de to lærebøger jeg havde til rådighed, havde det niveau af kreativitet jeg søgte for at lade eleverne arbejde med forståelsen af den basale algebra. Carstensen og Frandsens opgavesamling (1997b) indeholder mange gode opgaver til at træne færdigheder, mens teoribogen (Carstensen & Frandsen, 1997a) er velegnet til opslagsbog efter elevernes arbejde mod forståelse af algebraen. Jensen og Marthinus (2006) kommer med en halvhjertet forklaring på lighedsbegrebet. Madsen (1995) illustrerer multiplikation af flerleddede størrelser geometrisk, og drager herfra en parallel til multiplikation af brøker. Han eksemplificerer også hvordan et resultat skal afrundes afhængig af måleusikkerheden på de givne oplysninger. Jessen, Møller og Mørk (1997) viser hvordan en stor del af den basale algebra kan forstås ud fra tallinjer og sildebensdiagrammer, og dedikerer hele første kapitel til motivation for eleven. I næste kapitel vil jeg beskrive det designede undervisningsforløb, hvor enkelte dele er plukket fra de omtalte lærebøger, men hvor inspirationen i lige så høj grad er hentet andre steder.

9 Undervisningsforløbet

Formålet med undervisningsforløbet er som skrevet, at forbedre elevernes forståelse af regnearternes hierarki, isolering af en variabel og reduktion gennem problemløsning. I dette kapitel vil jeg beskrive de fem temaer jeg har opdelt undervisningsforløbet i, og redegøre for nogle af de tanker jeg har gjort mig under udarbejdelsen af undervisningsmaterialet. Sidst i kapitlet vil jeg foreslå mulige retninger for undervisningen efter introforløbet i den basale algebra.

Da jeg har taget højde for den ret begrænsede tid der kan sættes af til formålet i gymnasieskolen, har jeg valgt at lade undervisningsforløbet være meget styret af undervisningsmaterialet. Forstået på den måde, at eleverne får en række mindre opgaver, snarere end de større problemer Schoenfeld foreslår (1994a).

Den basale algebra skal hovedsageligt udvikles gennem aritmetikken, så principperne og processerne eleverne har brugt ni år i grundskolen på at lære, vil jeg ikke opfinde en gang til. Eleverne får dog lov til at eksperimentere lidt, og da netop udviklingsprocessen af matematikken er vigtig for en større forståelse for matematikken (Schoenfeld, 1994a), får de forhåbentligt en bedre forståelse for de basale regneregler og teknikker.

Jeg har under udarbejdelsen af undervisningsmaterialet lagt vægt på at eleverne skal:

- *Eksperimentere sig frem til matematiske resultater*
- *Optræne forståelse frem for rutine*
- *Visualisere algebraen*
- *Nå hele forløbet på 5 gange 2 lektioner*

Da tiden er en vigtig faktor i undervisningen, har jeg forsøgt at lave noget materiale der er hurtigt at overskue og læse. Det er således ikke meningen, at de fem temaer skal være fyldestgørende i sig selv, men at de skal opfylde de krav jeg har listet herover. Undervisningsmaterialet er fremstillet på få ark, hvor teori og opgaver er præsenteret som sedler på en opslagstavle. Arkene er hovedsageligt delt op i arbejdsark og opgaveark, hvor eleverne skal lære teorien gennem arbejde med arbejdsarkene, og efterfølgende bruge den opnåede viden på opgavearkene. Da de to typer af ark ikke er strengt opdelt, men flyder lidt sammen, har jeg brugt forskellige rammer til at indikere hvad der er opgaver, og hvad der er teori. Da jeg kun har haft begrænset plads til opgaver på et enkelt ark, skal eleverne stilles flere opgaver fra andre kilder hvis de ud over at arbejde med forståelsen også skal opøve deres færdigheder. Det er vigtigt at NCTM's principper (se s. 27) overholdes i forløbet, da jeg har argumenteret for at undervisningen da er tilfredsstillende, og strukturen i lektionerne skal følge DRM som er beskrevet under princippet om undervisning (se s. 30). De fem temaer kalder jeg:

- *Bægre & bønner*
- *Ligevægt*
- *Arealer*
- *Brøker*
- *Potens & rod*

Eleverne får først et arbejdsark udleveret med en række opgaver der kan løses i små grupper, gerne af to elever. Her bliver de præsenteret for nyt matematik, eller velkendt matematik på en ny måde. Eleverne skal i grupper diskutere og finde frem til hvilken teori der gælder for emnet. Det skal dog sikres, dels at der finder indlæring sted, og dels at den indlæring der finder sted er i overensstemmelse med hvad underviseren ønsker eleverne skal lære. Derfor diskuteres elevernes resultater herefter på klassen, hvor de vigtigste metoder og værktøjer bliver samlet så eleverne har et klart overblik over hvad de har fået ud af deres arbejde. Herefter skal eleverne, selvstændigt eller i små grupper, bruge det de har lært til at løse en række opgaver fra det tilhørende opgaveark. Alle elevarkene ligger under bilag 3 (s. 109).

Ved at udforme undervisningsmaterialet så eleverne gennem fysiske og visuelle øvelser skal opdage algebraens grundlæggende regler, og ved at give eleverne mulighed for at arbejde i deres eget tempo, vil jeg således opfylde de fleste af NCTM's principper. Jeg har ikke opdelt arkene så de er tydeligt niveaudelt. Jeg forestiller mig, at de svageste elever ikke når hele arbejdsarket igennem inden klassediskussionen. Underviseren kan bede de hurtigste elever med egne ord nedskrive hvad de har fået ud af øvelserne. Netop denne formulering er svær for eleverne, og vil være en udfordring for selv de dygtigste elever, men en god øvelse i dokumentation. På opgavearket har jeg indlagt nogle ekstraopgaver, der ikke nødvendigvis er sværere end de øvrige opgaver, men som er tiltænkt de elever der føler sig motiverede.

Evaluering af de enkelte elever vil foregå løbende gennem klassediskussionen, og gennem hjælp eller opmærksomhed under opgaveregningen. Desværre vil der ikke være sat tid af til, at elever der ikke kan følge med i undervisningen kan få rettet op på dette. Min hypotese er, at de svageste elever alligevel har mulighed for at forstå dele af algebraen hvis arbejdsarkene er baseret på et ikke algebraisk sprog de forstår, og eleverne selv gør en indsats for at arbejde med øvelserne. Jeg har tidligere været inde på, at eleverne selv er ansvarlige for, om de lærer noget eller ej. Hvis ikke de gør en aktiv indsats selv, kan de ikke lære matematik, og selv om de gør en indsats, er det ikke sikkert at forståelsen opstår med det samme (Hiebert & Grouws, 2007).

I kurserne har jeg lagt vægt på at optræne elevernes symbolforståelse, men har grundet den begrænsede tid ikke målrettet undervisningen efter at eleverne skal opnå den nødvendige variabelforståelse. Da eleverne har svært ved at opnå en god forståelse for variable størrelser (Bloedy-vinner, 2001), er det derfor en god idé at underviseren efterfølgende lægger nogle kræfter i variabelforståelsen f.eks. i forbindelse med introduktion af funktionsbegrebet. Eleverne vil i forløbet blive introduceret for ligninger, men ikke for grafiske afbildninger. Da jeg på den korte tid ikke kan nå at gå i dybden med dette, har jeg valgt ikke at implementere det i forløbet for ikke at blande for mange elementer sammen. Hvis eleverne giver udtryk for at have styr på afbildningen af en førstegradsligning, kan de udfordres ved at vise ligheder grafisk.

Princippet om brug af teknologi i undervisningen bliver forsømt. Jeg tror dog ikke at princippet skal forstås således, at teknologi skal implementeres i alle dele af undervisningen. Teknologien kan være meget anvendelig når eleverne skal optræne deres variabelforståelse, men da de grundlæggende algebraiske færdigheder som jeg lægger vægten på i forløbet, skal mestres uden brug af CAS-værktøjer (Computer Algebraic Systems), er tekniske hjælpemidler der giver eleven svaret, frem for at fungere som et pædagogisk værktøj, ikke nødvendigvis brugbart i undervisningen.

Som Dettori, Garuti og Lemut (2001) skriver, kan eleverne ikke lære at manipulere med symboler ved hjælp af regneark. Dog kan eleverne lave opgaver fra Boons algebraspil (se bilag 2, s. 105) efter temaet *Bægre & bønner*, for at træne metoderne ved isolering af en størrelse.

9.1 Regnearternes hierarki

Jeg har ikke lavet et emne om regnearternes hierarki. Her har jeg tænkt mig at underviseren selv skal lave et lille oplæg om regnearterne, og vise hvordan addition og subtraktion, multiplikation og division samt potens og rod hører sammen. Som forklaring til hierarkiet kan underviseren vise, hvordan en potens med heltals eksponent kan laves om til et multiplikationsstykke, og derfra til et additionsstykke. Det er også vigtigt, at eleverne lærer hvad parenteserne betyder. Dette kan evt. tages i forlængelse af en introduktion til talmængder og systemer.

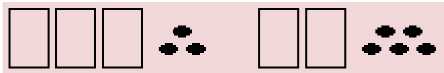
Hvis underviseren har mod på det, foreslår jeg at lektionen med regnearternes hierarki afsluttes med at underviseren læser eventyret ”De tre regnearter”, som findes i bilag 4 (s. 125), højt for klassen, og herefter deler et trykt eksemplar ud til eleverne så de selv kan genlæse eventyret efter behag. Alternativt kan eventyret bare deles ud, hvilket dog ikke er helt så sjovt. ”De tre regnearter” har jeg skrevet som et huske-eventyr om regnearternes hierarki, og er tænkt som en afslutning på arbejdet med hierarkiet, og ikke som undervisning i sig selv. Det er meningen at det skal være fagnørdet på en sjov måde, så eleverne forhåbentlig får lyst til at følge med i hvad der sker i de efterfølgende timer. For uden motivering, kan indlæring ikke finde sted (Balling, 2003). Der optræder i eventyret begreber som optimeringsprojekt og uegentlige vektorer, som eleverne først får kendskab til senere. Det er helt bevidst at jeg bruger nogle begreber som eleverne endnu ikke kender, da de ved genlæsning gerne må blive nysgerrige, og tænke nærmere over eventyrets betydning. Hvis eleverne genlæser eventyret, stiller de sig måske nogle af følgende spørgsmål:

- *Hvad fortæller eventyret matematisk?*
- *Hvorfor siger Potens, at den har været som både plus og gange?*
- *Hvorfor finder regnearterne sammen, som de gør på den anden side af broen?*
- *Hvad er pointen i, at trolden skal fri af en parentes, før den må regne med regnearterne?*

9.2 De 5 emner og deres formål

9.2.1 Bægre & bønner

Bægre & bønner skal lære eleverne at løse ligninger af formen $ax + b = cx + d$. Konceptet er taget fra Algebra för alla (Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L., 2000, s. 64-66), og henvender sig specielt til de taktile elever, dvs. elever der bedst lærer ved at have noget mellem hænderne. På hver side af et bord lægges nogle bønner og nogle bægre. Eksempelvis skal der i elevernes første udfordring være 3 bægre og 3 bønner på den ene side af bordet, og 2 bægre og 5 bønner på den anden side af bordet som vist på figur 5.



Figur 5

Eleverne skal nu regne ud hvor mange bønner der skal være i hvert bæger, for at der samlet set er lige mange bønner på hver side af bordet og lige mange bønner i hvert bæger. Efter en række opgaver har eleverne forhåbentligt lavet en lettere notation af opstillingen, og fundet en systematisk måde at løse opgaven på. Underviseren skal være opmærksom på at eleverne kan løse opgaverne ved hjælp af gættemetoden, og at de sproglige opgaver sidst på opgavearket kan løses uden brug af algebra (Dettori, 2001). F.eks. kan opgaven med telefonabonnementerne løses ved at sige, at forskellen på abonnementsprisen er 50kr. og forskellen på samtaleprisen er 40 øre. Da der skal tales 2,5minut for at forskellen bliver 1kr. skal der tales 2,5·50 = 125 minutter før abonnement 2 bliver billigst. Det er derfor vigtigt at underviseren noterer sig hvilke elever der rent faktisk benytter algebra til at løse opgaverne. Eleverne skal få en bedre forståelse for ligheder ved at se at ligheden kan bevares ved at foretage samme handling på begge sider. Sammen med den algebraiske notation, skal det føre til en større algebraisk forståelse og en fornemmelse for at algebra har rod i virkeligheden. Ligeledes tvinges eleverne til selv at finde en løsningsstrategi, og forhåbentligt bemærker de nødvendigheden i at bruge deres logiske sans, hvis de skal løse opgaven.

Er der elever der ønsker ekstra udfordringer kan de efter at have arbejdet med arbejdsarket lave grafiske løsninger, indføre farvede bønner som negative værdier, eller bruge forskellige bægre og regne med flere ubekendte. Bemærk at Boons algebraspil, som jeg tidligere har omtalt og som kan ses i bilag 2 (s. 105), kan bruges til at træne løsningsgangen af disse ligningstyper. Det kan dog ikke erstatte øvelser i hånden, da eleverne f.eks. blot skal trykke på en knap for at ophæve en parentes, og dermed ikke behøver at kunne udføre denne handling selv.

9.2.2 Ligevægt

Ligevægt er et tema, hvor eleverne fysisk skal danne ligevægt med nogle udleverede elementer af forskellig vægt. Eleverne bliver om muligt delt op i et lige antal tomandsgrupper, hvor hver gruppe får en vippevægt og en æske små søm. Hver anden gruppe får desuden en æske store søm, mens de øvrige grupper udover de små søm også får en æske skruer. Tomandsgrupperne skal nu finde ligevægt mellem de to forskellige slags elementer de har fået udleveret. Når de har gjort det, skal de regne ud hvordan de kan lave andre ligevægte, f.eks. ved at komme et lille søm ekstra i hver vægtskål, eller fordoble antallet af elementer i vægtskålene. Formålet er at eleverne skal opnå en fysisk fornemmelse og herigennem en strukturel forståelse for ligevægte og ligheder, herunder en forståelse for at de ud fra en lighed kan opskrive andre ligheder ved at foretage visse manipulationer af den oprindelige lighed.

Når eleverne mener de har fundet de kombinationer de har mulighed for med de udleverede elementer, skal de gå sammen med en gruppe der har fået udleveret nogle andre elementer end dem selv. I denne nye dobbeltgruppe skal de sammenligne deres vejninger, og prøve at finde ud af hvordan de kan skabe ligevægte hvis de må benytte alle tre elementer. Herefter skal de naturligvis afprøve deres teorier på vægtene. Her skal eleverne få en fornemmelse for, hvordan ligninger kan kombineres f.eks. ved at lægge dem sammen, og herved lægge kim til løsning af ligningssystemer med flere ubekendte.

Endelig skal eleverne hente et lod hos underviseren. Dette lod skal veje mindre end det letteste element. Med det skal de prøve at bestemme vægten af hvert element. Da loddet er det letteste element de har til rådighed, tvinger det eleverne til at lade loddet indgå i en ligning, og løse to ligninger med to ubekendte, hvis de skal løse opgaven. Hvis det lykkedes for dem, skulle det være en smal sag også at finde vægten af det sidste element, og altså løse tre ligninger med tre ubekendte. Arbejdsarket fortæller ikke eleverne hvordan eleverne skal komme frem til de forskellige løsninger, da de skal have lov til selv at tænke over løsningsstrategier inden de evt. spørger om hjælp. Løsning af ligningssystemer med flere ubekendte er nyt for eleverne. Jeg forventer derfor ikke at alle eleverne vil forstå denne del. Øvelsen danner dog et referencepunkt som jeg senere kan benytte mig af i undervisningen, og da tror jeg en mental genkaldelse af øvelsen vil kunne få flere elever til at forstå hvordan ligningssystemer løses.

På opgavearket starter eleverne, som under *Bægre & bønner* med at løse nogle sproglige opgaver der ligner opgaverne fra arbejdsarket, før de går over til at løse rene algebraiske opgaver, og til sidst slutter med sproglige opgaver hvor eleverne kan se en anvendelse af det de har lært. Igen skal underviseren holde øje med om eleverne benytter sig af algebra til løsning af opgave 6 på opgavearket, eller om de vælger at løse opgaven aritmetisk. Ifølge Rombergs fem principper, skal eleverne allerede inden de arbejder med emnet kunne se anvendelse for ligningsløsningen. Dette princip bliver holdt ved at eleverne ikke lærer en teori, som de efterfølgende ser anvendelsen af. Eleverne får i stedet en række opgaver de skal forsøge at løse, og herudfra danne de ønskede metoder. Metoderne opstår dermed i behovet for at løse en opgave. Det er reelt Rombergs princip om historiefortællingen, men den medvirker til at princippet om behovet er opfyldt.

9.2.3 Arealer

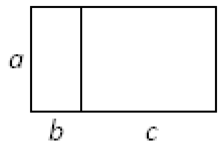
Arealer skal visualisere den distributive lov, og lære eleverne at forstå og bruge den til at hæve parenteser og faktorisere udtryk. Eleverne skal forstå hvordan flerleddede størrelser multipliceres. Herudover får de træning i at se strukturer, at føre simple beviser samt at reducere simple udtryk.

Emnet er relevant for elever der skal introduceres for algebra og som er vant til at regne aritmetisk, da parenteser i aritmetikken kan udregnes og hæves uden omskrivninger. Eleverne der er uvante med algebra, og som allerede har redskaberne til at reducere udtrykket $(6+4)(6-4)$, skal derfor have nye redskaber hvis de skal reducere udtrykket $(a+4)(a-4)$.

Til temaet hører fire ark. Eleverne har i de to foregående temaer set hvordan bogstaver kan bruges som pladsholdere for værdier der på nuværende tidspunkt er ukendte. Her har de ligeledes set, at det er smart at have en kort og overskuelig notation til at beskrive forskellige situationer. I dette tema formaliseres algebraen, så eleverne får samme notation. Det første ark er derfor et indledende ark med fire kasser, hvor der i korte træk står:

- *Vær ikke bange for algebra – du har alle forudsætninger for at lære det (tryghed)*

- *Du vil lære nyt matematik, som du vil få brug for (motivation)*
- *Forståelsen er vigtig (forståelse)*
- *Multiplikationstegnet kan ofte undlades i algebra (notation)*



Figur 6

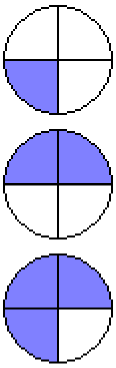
Det andet ark er et arbejdsark hvor eleverne introduceres for hvordan de kan opfatte produktet af to størrelser som et areal. Eleverne skal lære at omskrive fra en vilkårlig side af lighedstegnet i udtrykket $a(b+c) = ab + ac$ til den anden side. Dvs. de skal lære at hæve parentesen på venstre side af lighedstegnet, og de skal lære at faktorisere udtrykket på højre side af lighedstegnet. Som nævnt sætter jeg større fokus på at eleverne skal lære at forstå baggrunden for disse omskrivninger, end opøvelsen af deres færdigheder alene. Derfor skal eleverne enten opskrive en lighed ud fra en illustration som vist på figur 6, eller lave en illustration der kan forklare en given lighed.

Det tredje ark er endnu et arbejdsark, hvor eleverne skal arbejde med forståelsen af hvad det vil sige, hvis en af størrelserne fra ligningen fra det første arbejdsark bliver negativ, samt med produktet af flerleddede størrelser som $(a+b)(c+d)$ og de tre kvadratsætninger.

Det sidste ark er et opgaveark hvor eleverne kan træne deres forståelse for emnet.

Bliver nogle elever hurtigt færdig med arbejdsarkene kan de reducere videre på udtrykket nederst på arbejdsark 1 eller udfordre hinanden med egne opgaver.

9.2.4 Brøker



Figur 7

Brøker er medtaget fordi brøkregning i algebra opleves som en ny situation for eleverne. Så selv om eleverne har lært aritmetisk brøkregning, er det en god idé at vise dem hvordan de kan bruge deres viden i algebraen, da de ikke nødvendigvis kan se denne sammenhæng (Sfard & Linchevski, 1994). Eleverne er blevet undervist i brøkregning i grundskolen, og har i dette tilfælde valgt en ungdomsuddannelse der er baseret på matematik. Selv om det er farligt, vil jeg på grund af tiden derfor forudsætte at eleverne har en fornuftig forståelse for matematik fra grundskolen, og gå hurtigt hen over reglerne for brøkregning, ved at udlevere et ark med regneregler samt et ark med forklaringer. De fleste regler kan let illustreres visuelt, og nogle af forklaringerne er derfor overladt til eleverne, der således får en fornemmelse for hvordan reglerne er opstået. For at eleverne ikke skal køre sur i at skulle finde argumenter for alle regnereglerne, skal de blot forklare reglerne i figur 8 ud fra figur 7. Eleverne bemærker formodentligt hurtigt, at de samme regneregler går igen hvor ligheden er vendt om. Jeg har valgt at duplikere reglerne, for at pointere over for eleverne, at omskrivningen er gyldig begge veje. De svage elever vil formodentligt være glade for denne udpensling, mens de elever der finder det fjollet, netop har opnået hvad jeg gerne vil frem til ved at indse, at det er unødvendigt at skrive "de samme" regler op to gange. Ud over hjælpen til de svage elever, kan duplikeringen derfor ses som en øvelse i at forstå lighedsbegrebet.

Brøker med fælles nævner kan lægges sammen eller trækkes fra hinanden:

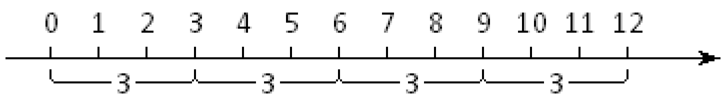
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Omvendt kan en brøk med flere led i tælleren deles ud i flere brøker:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}, \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

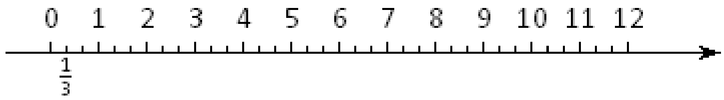
Figur 8

Reglen for at dele med en brøk, illustreres godt af Jessen, Møller og Mørk (1997, s. 31) ved hjælp af tallinjen. Først ses at 12 delt med 3 giver 4. I stedet for, at dele 12 op i 3 lige store dele og se at hver af disse dele vil være 4, ser de hvor mange gange 3 kan være indeholdt i 12. Reelt ser de dermed hvad 12 skal deles med for at få 3, men da 12 jo netop skal deles med $\frac{12}{3}$ for at få 3, svarer det til, at finde resultatet af 12 delt med 3. Jessen, Møller og Mørk illustrerer 12 delt med 3 med en figur svarende til figur 9.



Figur 9

Jessen, Møller og Mørk nøjes dog med at skrive at *"divisionen $12:3=4$, betyder [...], at tallet 3 er indeholdt 4 gange i 12"*. Eleverne vil formodentligt acceptere den visuelle forklaring, da de i forvejen ved at 12 delt med 3 giver 4, og har hermed ikke behov for en større fordybelse i om opdelingen generelt er brugbar. Herefter ses at $\frac{1}{3}$ er indeholdt 36 gange i 12 (se figur 10) hvormed 12 delt med $\frac{1}{3}$ må være 36. Da der er tre stykker af $\frac{1}{3}$ for hvert hele tal, må 12 delt med $\frac{1}{3}$ derfor også være det samme som 12 gange 3.



Figur 10

Er de to foregående forklaringer ved hjælp af tallinjen forstået, er der herfra ikke langt til $\frac{2}{3}$ skal tages atten gange for at nå op på 12 (se figur 11), og da der er halvt så mange stykker som i foregående eksempel, må 12 delt med $\frac{2}{3}$ være det samme som 12 delt med $\frac{1}{3}$ delt med 2 eller $12 \cdot \frac{3}{2}$.

Figur 11

Jeg har dog valgt at lave et sprogligt eksempel som, hvis eleverne tænker videre, skal give en forståelse for regnereglen, samt for hvorfor noget bliver større når det deles med en ægte brøk. Det skyldes at opdelingen af tallinjen strider imod min egen intuitive opfattelse af en brøk nemlig, at intervallet deles op i det antal dele der skal deles med, hvormed 12 delt med 3 ikke deles i fire dele hver af længden 3, men i tre dele hver af længden 4, og at Jessen, Møller og Mørks fremstilling derfor ikke nødvendigvis er direkte forståelig. En visuel præsentation af regnereglen havde været at foretrække, men det er ikke lykkedes for mig, at finde en simpel illustration i stil med elevarkets forrige illustrationer, der fremstår letforståeligt for eleverne.

9.2.5 Potens & rod

Potens & rod afslutter forløbet. Det var ikke muligt for mig at finde nogle gode visuelle forklaringer på potenser. Kvadrater og kuber kan naturligvis bruges til at illustrere hvordan potenser med eksponenten 2 og 3 kan forstås, og herunder også rødderne, men hvis reglerne skal forklares på fornuftig vis, er der brug for fire, og helst seks dimensioner, hvilket ikke er brugbart på dette niveau. Jeg synes dog at forløbet var ukomplet uden et tema om potenser og rødder, og har derfor valgt at tage det med i forløbet, selvom jeg i modstrid med målsætningen, har set mig nødsaget til at forklare regnereglerne algebraisk. På nuværende tidspunkt burde eleverne begynde at få en fornemmelse for algebraen, og dermed have forudsætningerne for at arbejde med temaet. Jeg giver dog ikke køb på at eleverne selv skal udvikle regnereglerne. Her opskriver jeg ni omskrivninger som ikke alle er gyldige. Eleverne skal så vurdere hvilke potensregneregler der er gyldige og hvilke der er forkerte. Hvis eleverne arbejder seriøst med opgaven, bliver de udfordret med problemløsning og bevisførelse. De får vist hvordan rødder kan skrives om til potenser, og skal herudfra se hvilke potensregneregler der kan overføres til regneregler for rødder. Eleverne ser dermed at regnereglerne ikke bare er noget underviseren kommer med, men at de er udviklet ud fra matematik eleverne allerede kender. Som en lille bonus har jeg på opgavearket valgt at introduceret eleverne for Whitmans (1975) intuitive metode. Formålet hermed er at hjælpe eleverne til at opnå et større overblik, og give dem en metode der kan bruges når det er praktisk at substituere.

9.3 Det videre forløb

I naturlig forlængelse af forløbet kommer uligheder, første og andengradspolynomier samt funktioner. Flere af de artikler jeg har læst gennem dette arbejde beskriver elevernes problemer med at forstå variabelbegrebet (f.eks. *Sfard, 1994; Bloedy-vinner, 2001; Michelsen, 2001; Blomhøj & Jensen, 2007)*. Jeg har derfor i dette afsnit samlet nogle ideer til det videre forløb hvor forståelse af variabelbegrebet er i fokus.

Dettori, Garuti og Lemut (2001) beskriver hvordan regnearket kan bruges til at forklare forskellen på ukendte og variable, Bl.a. ud fra følgende opgave (s. 197):

> *På en fisketur fangede vi en stor fisk. Halen vejede 4 kg., kroppen vejede det samme som hovedet og halen tilsammen og hovedet vejede det samme som halen plus halvdelen af kroppens vægt. Hvad vejede hele fisken?*

På grund af cirkelreferencerne er denne opgave svær at løse aritmetisk, og kan ikke umiddelbart løses i et regneark. Halens vægt som er konstant kendes. Hvis der laves et gæt for hovedets vægt, kan kroppens vægt beregnes som summen af hovedet og halen, og det kan tjekkes om halen plus den halve kropsvægt svarer til hovedet. Dettori, Garuti og Lemut (2001, s. 205) skriver regnearket op som vist på figur 12, hvor nederste række viser udregningen.

	A	B	C	D	E
1	Hoved (gæt)	Krop	Hoved (korrigeret)	Hale	Hele fisken
2		hoved + hale	hale + 1/2*krop	4	
3					
4	8	12	10		26
5	9	13	10,5		27,5
6	10	14	11		29
7	11	15	11,5		30,5
8	12	16	12		32
9	13	17	12,5		33,5
10	=A9+1	=4+A10	=4+1/2*B10		=B10+C10+4

Figur 12

Løsningen findes dermed ved hjælp af gættemetoden. Hovedets vægt er en ukendt der ønskes bestemt, men det ses f.eks. i kolonne B hvordan der i beregningerne bruges et interval af værdier fra kolonne A som en variabel. Eleverne skal opnå en fornemmelse for dette gennem udarbejdelse af arbejdsarket, og underviseren kan herudfra forklare forskellen på ukendte og variable.

Regneark kan også benyttes som beskrevet under teknologiprincippet (s. 36), og flere af de omtalte programmer kan implementeres i et forløb. En regelmæssig brug af grafregneren gennem undervisningsforløbet gavner ifølge Kieran (2007) elevernes forståelse for funktioner.

Michelsen (2001) foreslår, at funktionsbegrebet indføres ved hjælp af eksponentielle udviklinger frem for lineære udviklinger, da den eksponentielle udvikling ifølge Michelsen giver større mulighed for at fokusere på variabelbegrebet end den lineære udvikling, og der ikke *"findes vægtige didaktiske begrundelser"* imod at starte med den eksponentielle udvikling frem for den lineære udvikling (Michelsen, 2001, s. 160). Hvis funktionsbegrebet introduceres med en simulation af henfald ved hjælp af terningekast, kan flere præsentationsformer kombineres. Eleverne får hver en mængde terninger. Terningerne repræsenterer kernerne i et radioaktivt nuklid hvor sandsynligheden for at en kerne henfalder, er en sjettedel i et bestemt tidsinterval. Ved at kaste terningerne og fjerne alle sekserne, kan eleverne på den måde simulere henfaldet. Eleverne skal lave et fysisk forsøg som er let overkommelig og forståelig, herudover skal de opskrive resultaterne i en tabel, og afbilde henfaldets punktværdier sammen med grafen for den matematiske model.

I dette kapitel har jeg fastlagt hvad jeg har lagt vægt på i udarbejdelsen af undervisningsforløbet. Blandt andet har jeg lagt vægt på at algebraen skal forklares ud fra en ikke algebraisk begrebsverden som eleverne allerede er fortrolige med. Jeg har delt forløbet op i fem temaer, hvor eleverne skal arbejde med forståelse af lineære ligninger og lighedsbegrebet. Eleverne skal skabe en bro mellem matematikken og den fysiske verden som, udover øget forståelse, skal danne referencepunkt for den senere undervisning. Eleverne skal arbejde med flere repræsentationsformer, og herigennem se hvordan de grundlæggende algebraiske regler er tilpasset den virkelige verden samt den opfattelse og logik der falder naturligt. Brøker falder naturligt ind under de emner eleverne skal arbejde med, mens jeg ikke har fundet en naturlig visuel fremstilling af potenser og rødder som fremstår indlysende. Sidst i kapitlet gav jeg en række ideer til hvor undervisningen kan bevæge sig hen efter dette grundforløb. Hermed slutter specialeopgavens del om undervisningsforløbet. I næste kapitel vil jeg diskutere de empiriske undersøgelser.

10 Evaluering af de empiriske undersøgelser

I dette kapitel vil jeg beskrive og diskutere undervisningsforløbet og dets effekt på eleverne. Med flere testklasser, et forløb med flere temaer, og efterfølgende evaluerende opgaver, er kapitlet ret omfattende. Jeg har delt evalueringen af de fem forløb plus evaluering af elevernes kendskab til regnearternes hierarki op i hvert sit delkapitel 10.1-10.6. Her vil jeg beskrive forløbet, og diskutere udbyttet. Jeg har evalueret eleverne med flere opgaver. Først har jeg testet elevernes færdighed med en færdighedstest, udarbejdet af min kollega Anne-Mette Hansen, bestående af 80 små opgaver. Jeg vil analysere dele af denne test under evalueringen af regnearternes hierarki, samt temaet *Brøker*. Herefter har jeg lavet et evalueringsark i stil med de elevark der har dannet grundlag for forløbet, som jeg vil analysere og diskutere i kapitel 10.7. Jeg har også fundet det relevant at teste elevernes evne til at forklare deres algebraiske udregninger. En analyse heraf er, sammen med en enkelt opgave fra Carstensen og Frandsen (1997b), at finde i kapitel 10.8. Endelig vil jeg runde kapitlet af med en samlet betragtning af de empiriske undersøgelser i kapitel 10.9.

Forløbet er afprøvet på mine to egne 1. gymnasieklasser på hver 31 elever i perioden 11. august til 4. september 2009. Den ene af klasserne har valgt matematik som det ene studieretningsfag, og skal dermed have matematik på A-niveau efter grundforløbet. Herudover er nogle af temaerne afprøvet på 1. gymnasieklasser af mine kollegaer Peter Alan Nielsen og Steen Heide. Da temaerne er lavet så de kan bruges selvstændigt uden brug af de øvrige temaer, vil jeg vurdere hvert tema for sig.

Jeg har valgt ikke at måle elevernes færdigheder op imod en blindgruppe. Den vigtigste grund hertil er at eleverne bliver gode til det de bliver trænet i. Derfor vil udformningen af en sådan test formodentligt have afgørende betydning for resultatet. Herudover er der en del variable jeg ikke kan kontrollere, og som kan have betydning for resultatet (Kilpatrick, 1978). Her tænker jeg f.eks. på forskelligheder hos underviserne og i klasserumskulturerne. Endelig kan effekten af undervisningen ikke forventes at kunne ses umiddelbart efter forløbene. Jeg vil alligevel evaluere både elevernes færdigheder og deres forståelse. Samlet set vil jeg vurdere hvor vellykket jeg finder de forskellige temaer til undervisningen i starten af 1. gymnasieklasse.

Til at evaluere elevernes færdigheder og kundskaber har jeg lavet et evalueringsark, hvor eleverne skal besvare 4-5 spørgsmål der omhandler de første tre arbejdsark. Jeg har lavet nogle spørgsmål der er udfordrende for eleverne, så jeg kan se om de er blevet i stand til at tænke over løsningen, eller om de bare gør som de tror de skal gøre. Grunden til at potenser ikke er medtaget i evalueringen er, at emnet skal have lov til at bundfælde sig hos eleverne. Emnet er ikke blevet visualiseret på samme måde som de første fire arbejdsark, og da eleverne ikke for alvor kommer til at benytte potensregning lige med det samme, vil jeg ikke skabe større frustrationer hos de svage elever end højst nødvendigt. Når eleverne får brug for potensregning, har de fået større erfaring med algebra, og har dermed større mulighed for at forstå emnet til fulde. Brøkregningen som blot er medtaget for at vise eleverne at den brøkregning de allerede kender fra grundskolen kan bruges på algebraiske udtryk, er heller ikke repræsenteret på evalueringsarket, og forståelsen af emnet vil ikke blive evalueret skriftligt. Dog vil elevernes færdigheder i brøkregning blive evalueret efter forløbet sammen med elevens øvrige algebraiske færdigheder i en færdighedstest udarbejdet af min kollega Anne-Mette Hansen.

Jeg vil under de empiriske undersøgelser notere, hvorvidt det er muligt at evaluere hver enkelt elev under elevarbejdet. Herudover har jeg valgt i mine egne klasser, at evaluere klassens forståelse som et samlet billede gennem klassediskussionen efter elevernes arbejde med arbejdsarkene. Da jeg kun har begrænset mulighed for at notere observationer under diskussionen, har jeg derfor med klassens accept valgt, at videofilme klassediskussionerne, mod lovning på at disse klip ikke bliver offentliggjort, og at de bliver slettet når mit arbejde med denne specialeopgave er færdigt, hvilket jeg naturligvis respekterer. Da spørgsmål og konklusioner under klassediskussionen vil blive skrevet på tavlen, har jeg valgt at placere kameraet i et hjørne bagerst i klasselokalet, så det fanger tavlen og flest mulige elever. Det er ligeledes min vurdering at denne opstilling vil forstyrre eleverne mindst muligt under diskussionen. Netop for at et kamera ikke skal være en hæmmende faktor på elevernes deltagelse, har jeg valgt ikke at rette kameraet mod en gruppe elever under arbejdsprocessen, selv om jeg her kunne samle værdifulde informationer om elevernes arbejdsmetoder. I mine kollegers undervisning havde jeg mulighed for at tage løbende notater både under elevernes selvstændige arbejde, og under klassediskussionerne. Derfor har jeg ikke benyttet mig af elektronisk udstyr i disse timer. I kraft af at jeg ikke skulle hjælpe eleverne, har jeg haft mulighed for at skabe et større overblik over elevernes arbejdsmetoder end i mine egne undervisningstimer. Jeg har derfor valgt i disse timer, at koncentrere mig om hvorvidt eleverne tager positivt imod temaet og om de kan fastholde interessen, om gruppearbejdet fungerer og om eleverne viser forståelse for temaet.

10.1 Regnearternes hierarki

Regnearternes hierarki har jeg ikke lavet et specielt tema til. Det blev på klassen diskuteret hvilke regneoperationer der er stærkest. Jeg forklarede at subtraktion kan forstås som et negativt tal der bliver lagt til et andet tal. Tilsvarende viste jeg hvordan multiplikation og division kan forstås som samme operator. Potenser og rødder blev kun behandlet løst i introduktionstimen, da eleverne ikke havde de nødvendige forudsætninger for at forstå hvordan roduddrag kan forstås som en potens. Jeg gemte derfor forklaringen herpå til temaet om *Potens & rod*.

Eleverne så hvordan en potens med naturlig rod og eksponent kan omskrives først til et multiplikationsstykke, og herfra til et additionsstykke. Herudfra så de hvordan simple regnestykker kan omskrives, så de kun indeholder regneoperationen addition.

Introduktionstimen hvor hierarkiet blev diskuteret, blev i mine egne to klasser afsluttet med en oplæsning af eventyret ”De tre regnearter” (se bilag 4, s. 125). Herudover overværede jeg en kollega der læste eventyret højt for sin klasse. I alle tre klasser var der forholdsvis få reaktioner gennem eventyret, men en tydelig latter fra flere elever da de tre regnearter finder deres modstykker sidst i eventyret. Netop dette stykke er bevidst skrevet lidt sukkersødt, og måske er det en blanding af dette sammen med elevernes personlige forhold til kærlighed der giver dette mønster i klasserne. En uge efter oplæsningen havde syv ud af mine 62 elever genlæst eventyret, og elleve elever havde vist eventyret til andre. Undersøgelsen blev lavet ved håndsoprækning. At der er flere elever der vælger at vise eventyret til andre, end der er elever der har læst det selv, kunne tyde på at eleverne finder teksten for lang at gennemlæse. Jeg havde håbet at flere elever ville gennemlæse eventyret og tænke nærmere over hvad det betød. At en god sjettedel af eleverne vælger at vise eventyret til forældre eller venner betyder dog, at eleverne har fundet det interessant. Et samarbejde med dansk, hvor eleverne analyserer eventyret, ville tvinge eleverne til at forholde sig kritisk til indholdet.

Eleverne fik umiddelbart inden evalueringsarket en færdighedstest der skulle give et billede af elevernes algebraiske færdigheder. De første otte opgaver skal vise om eleverne kan holde styr på hierarkiet. Klassen der har valgt matematik som studieretningsfag kalder jeg klasse A, og klassen der ikke har valgt matematik som studieretningsfag, og dermed som hovedregel afslutter med matematik på B-niveau kalder jeg klasse B. Resultatet af testen var ikke imponerende. Kun syv ud af de 30 elever der tog testen i klasse A og kun to ud af de 29 elever der tog testen i klasse B regnede alle otte opgaver rigtigt.

Udtryk		Klasse A		Klasse B		Resultat	
		Rigtigt	Forkert	Rigtigt	Forkert	Rigtigt	Forkert
1	$5-2+4$	29	1	25	4	92%	8%
2	$(5-2)\cdot 4$	28	2	26	3	92%	8%
3	$5-2\cdot 4$	20	10	17	12	63%	37%
4	$4a-2a+8a$	28	2	25	3	92%	8%
5	$(7c-3c)\cdot 3$	27	3	23	6	85%	15%
6	$18b-3b\cdot 2$	20	10	19	10	66%	34%
7	$\left(3+2^2\right)\cdot 4-2$	20	10	20	9	68%	32%
8	$4+2^2\cdot(3-5)$	9	21	9	20	31%	69%

Figur 13

På resultatet af testen (se figur 13) ser det lidt overraskende ud som om udtryk 7 er lettere at reducere for eleverne end udtryk 3. Jeg har derfor set nærmere på hvad der går galt for eleverne når de skal reducere udtryk 3. Her viser det sig, at fem elever fra klasse A og ti elever fra klasse B skriver, at svaret er 3. Disse elever, som udgør majoriteten af de elever der reducerede udtrykket forkert, har derfor forstået at de skal multiplicere før de skal subtrahere. De får derved reduceret udtrykket til $5-8$, men kan ikke overskue rækkefølgen og reducerer videre til 3. Eleverne har muligvis tænk at de skal multiplicere før de må trække fra. Derfor multiplicerer de 2 og 4, hvilket giver 8 og trækker så de 5 fra. For at undersøge om eleverne tror $5-8=3$ har jeg ser nærmere på besvarelsen af udtryk 8, hvor parentesen $(3-5)$ indgår. Af besvarelserne fremgår det tydeligt, at fire elever i klasse A og syv elever i klasse B tror, at parentesen har værdien 2. Herudover kan der være flere som kunne have denne opfattelse, men hvor det ikke fremtræder med sikkerhed af besvarelsen. At eleverne reducerer udtryk 3 forkert, skyldes derfor ikke nødvendigvis at eleverne mister overblikket, men at de rent faktisk tror at en difference altid skal være positiv. seks ud af disse elleve elever, der tror $3 - 5 = 2$ i udtryk 8, får svaret 12, som ville være det korrekte svar, hvis udtrykket havde været $4 + 2^2 \cdot (5 - 3)$. Den hyppigste fejlreducering af udtryk 8 er dog -16, som fås hvis udtrykket havde været $(4 + 2^2) \cdot (3 - 5)$. I alt seksten elever laver denne fejl. Disse elever har fået den opfattelse af parenteser, at det inden for parentesen skal regnes for sig, og det uden for parentesen skal regnes for sig. Jeg har set nærmere på besvarelserne fra de elever der reducerer udtryk 8 til -16. Fem af disse seksten elever reducerer udtryk 3 til 3, og ni af eleverne reducerer udtryk 3 korrekt. Således er der kun to af disse elever der ikke ved, at de skal multiplicere før de skal subtrahere og addere. Jeg slutter derfor, at disse elever ikke ser strukturen i udtrykket og laver en fejlagtig opdeling. fire ud af de ni elever der ikke reducerede udtryk 5 korrekt svarede $4c \cdot 3$. Jeg vurderer at disse elever opfatter deres svar som indeholdende to faktorer der ikke kan regnes sammen frem for tre faktorer der kan reduceres yderligere.

Ud fra færdighedstesten ses det at der er få elever der helt mangler forståelse for hierarkiet, en del elever har problemer med negative tal, og størstedelen af eleverne mangler overblik over strukturen i et regnestykke og en klar forståelse for i hvilken rækkefølge operationerne skal udføres. Jeg konkluderer herudfra, at introduktionen til regneartenes hierarki ikke har haft den ønskede effekt.

10.2 Bægre & bønner

Temaet *Bægre & bønner* er afprøvet på fire klasser, der hver fik forskellige mundtlige præsentationer af temaet.

Den første klasse fik en grundig forklaring, hvor de fik besked på at finde ud af hvor mange usynlige bønner der er i hvert bæger. Hvorefter en elev med spørgsmålet: ”Dvs. bægrene det er x?” imod hensigten, fortalte resten af klassen at udfordringerne kunne ses som ligninger.

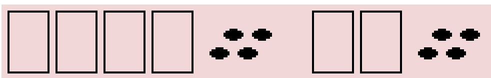
For at undgå at en elev forærede de øvrige elever en løsningsstrategi, blev den næste klasse uden mundtlig forklaring bedt om at gå i gang med arket. Det viste sig dog hurtigt, at eleverne ikke kunne gennemskue hvad opgaven gik ud på. Nogle elever troede at de skulle komme bønnerne ved siden af bægrene op i bægrene, andre troede at bægrene på den ene side af bordet skulle indeholde lige mange bønner, men ikke nødvendig vis det samme antal, som der skulle være i bægrene på den anden side af bordet. Der var også dem der startede med at fordele alle de udleverede bønner i bægrene, så der var lige mange i hver. Ud over problemet med at forstå hvad der skulle være i bægrene, havde eleverne ingen problemer med at placere de rigtige antal bægre og bønner adskilt i to grupper fra start. Klassen fik derfor efter kort tid en mundtlig forklaring af øvelsen.

Den tredje klasse fik en kort mundtlig forklaring på opstillingen af problemet. De fik herefter fortalt at der skulle være lige mange bønner i hvert bæger uanset placeringen og at de skulle finde ud af hvor mange bønner der skulle være i bægrene, for at antallet af bønner i bægrene og uden for bægrene tilsammen var det samme på begge sider. Også her var der en del elever der kom de bønner der skulle ligge ved siden af bægrene op i bægrene i forsøg på at løse opgaven.

Da eleverne i de tre klasser havde forstået opgaven, var den generelle metode at skrive problemet op algebraisk, løse ligningen, for derefter at fylde bønner i bægrene for at se om det passede. En enkelt elev var i stand til at løse opgaven uden brug af papir og blyant, ved at reducere bægre og bønner væk på begge sider af bordet, præcist som ved ligningsløsning. Da formålet med øvelsen var, at eleverne skulle opnå en intuitiv forståelse for hvordan problemer der algebraisk skrives $ax + b = cx + d$ kan løses, opnåede jeg ikke umiddelbart hvad jeg ønskede med øvelsen. Det var mit håb at flere elever uden at gøre brug af algebra, kom frem til at reducere opgaven ved at fjerne det samme antal bægre og bønner på hver side af bordet efter at have løst nogle opgaver. Jeg må ligeledes erkende, at den skriftlige forklaring enten var for abstrakt for eleverne, eller også har jeg været for sparsom med formuleringen. Det et muligt at eleverne ville have lettere ved at forestille sig at lukkede beholdere som f.eks. æsker, indeholder et ukendt antal bønner. Jeg viste før julen 2008 opgaven til en del af mine naturvidenskabelige kolleger. Her viste det sig at de skulle tænke sig om, og ikke umiddelbart så løsningen på opgaven. Det er derfor klart at der ikke er tale om en standard opgave, men en opgave hvor den matematiske og logiske sans skal tages i anvendelse.

Den sidste klasse fik også en mundtlig forklaring af opgaven, men blev bedt om ikke at løse opgaven på den lette måde. Dvs. de skulle lade være med at regne som de var vant til, eller at bruge den matematiske viden de i forvejen var i besiddelse af. De skulle prøve at finde ud af, hvad det var tiltænkt at de skulle have ud af øvelserne. Herudover skulle de prøve at formulere hvad de fandt ud af, så de på en let måde kunne videregive det de kom frem til. Klasse 4 havde lige så store problemer med at få styr på opgaverne som de øvrige klasser. F.eks. forsøgte flere at komme bønner fra bordet op i bægrene, og et enkelt hold startede med at komme otte bønner i hvert bæger, formodentligt for at opfylde spillets første regel.

I alle klasserne var der elever der løste udfordringerne ved hjælp af tællemetoden. Dvs. de kom en bønne i hvert bæger indtil udfordringen var løst. Det udløste nogle uhensigtsmæssige episoder. En tomandsgruppe kunne ikke løse udfordring 3 som er vist på figur 14



Figur 14

da de startede med at komme en bønne i hvert bæger. Efter få runder hvor de kom en ekstra bønne i hvert bæger kunne de se, at den aldrig ville gå op. I en anden klasse holdt en tomandsgruppe fast i tællemetoden ved at tegne cirkler på papiret, når de løb tør for bægre ved store antal. Gruppen løste opgave 1 fra opgavearket ved kun at tegne halvdelen af problemet, dvs. de reducerede 34 bægre og 14 bønner samt 26 bægre og 46 bønner til 17 bægre og 7 bønner samt 13 bægre og 23 bønner. Da de ikke skulle gøre noget ved bønnerne, blev de dog skrevet som tal. Selv om tællemetoden er uhensigtsmæssig ved større tal, var de alligevel ved at opfinde algebraen ud fra et fysisk problem.

Eleverne fandt frem til en del forskellige løsningsstrategier:

- *Fyld en bønne i hvert bæger og se hvornår der er lighed (tællemetoden)*
- *Forskellen på antallet af bønner deles med forskellen på antallet af bægre*
- *Reducer opgaven ved at tage de bægre der er i overskud på den ene side og de bønner der er i overskud på den anden side, for herudfra at finde resultatet*

- *Fjern det samme antal bønner og samme antal bægre på hver side af bordet, så vil der stadig være lige mange bønner på hver side af bordet, og resultatet kan findes*
- *Opskriv en ligning, og løs den ved at foretage det samme på begge sider af lighedstegnet*
- *Opskriv en ligning, og løs den ved hjælp af flyttemetoden*
- *Reducer opgaven ved at lade mindste antal bægre svarer til 1 genstand (Substitution)*

Eleven der foreslog substitution som en løsningsstrategi, angav denne strategi som en mulig strategi, men havde selv valgt at benytte en af de øvrige strategier. Han forklarede strategien ved i udfordring 1 at omskrive ligningen til $\frac{3}{2}g + 3 = g + 5$. Ved tællemetoden så han at g er 4 bønner, og da en genstand eller 4 bønner svarer til 2 bægre, skal der to bønner i hvert bæger. Metoden var i dette tilfælde ikke nogen hjælp, og kræver efterfølgende brug af en af de øvrige metoder hvis eleven skal løse udfordringen.

I mine kollegers klasser hvor jeg kunne fokusere på elevernes arbejdsmetoder, kunne størstedelen af eleverne fastholde interessen for temaet gennem lektionerne. I den ene klasse var eleverne delt i grupper af fire elever, og her var der generelt to til tre elever i hver gruppe der var aktive. De øvrige elever virkede ikke uinteresserede, men deltog ikke aktivt i diskussionerne. I den anden klasse var eleverne delt i grupper på to til tre mand. Mange af disse grupper fungerede godt, men enkelte grupper virkede her umotiverede. Eleverne havde under elevarbejdet generelt svært ved at sætte ord på deres handlinger.

En del af eleverne havde svært ved at se formålet med øvelsen. Det gjaldt specielt de elever der i forvejen var i stand til at løse opgaverne algebraisk. En elev forklarede mig, at han sagtens kunne regne med tal og bogstaver, men at han ikke kunne regne med bønner og bægre eller pærer og bananer. Det virkede som om han opfattede øvelserne som værende på et lavere stadie, han ikke behøvede at gå ned på. Det er derfor ved denne øvelse meget vigtigt at gøre det helt klart for eleverne hvad formålet med øvelsen er, nemlig at få en ikke algebraisk opfattelse af ligningsløsning. Dels for at opnå en større forståelse for hvorfor regnereglerne for ligningsløsning gælder, men også for at udvide deres aktionsradius, dvs. her at træne brugen af logisk tankegang og ligningsløsning i sammenhænge uden for den matematik eleverne er vant til. Det er ikke alle eleverne, der kan forstå hvorfor jeg vil have dem til at forstå regnereglerne. Enkelte elever har spurgt direkte, og det er min opfattelse, at en stor del af eleverne ville stille sig tilfredse med, at kunne anvende regnereglerne med den forståelse, de allerede har opnået fra grundskolen. Det var svært efterfølgende at få eleverne til at fortælle hvad de synes om øvelsen. De få der udtalte sig, sagde at det var en sjov måde at lære nyt på, at det var godt, og at det gav forståelse for ligninger.

Øvelsen *Bægre & bønner* kan sagtens tages ud af det samlede forløb, da den ikke dækker et teknisk område, som ikke er dækket ind af temaet *Ligevægt*. *Bægre & bønner* var tænkt som et underholdende og interessant tema at starte op på, hvor eleverne kunne arbejde med matematik på en anderledes måde, men hvis underviseren ikke er meget påpasselig med at fortælle eleverne det præcise formål med øvelsen, kan den være lige så frustrerende for eleverne som den er tænkt interessant. Jeg nåede i december 2008 at lave øvelsen *Bægre & bønner* med en 2. årgang på B-niveau i den sidste time inden juleferien. Bønnerne var byttet ud med pebernødder, og det var pga. julestemningen svært at få koncentration om øvelserne, men eleverne virkede tilfredse med at få noget anderledes og uforpligtende matematik inden ferien. Der er således en mulighed for at vente med temaet til en gang, hvor eleverne trænger til noget anderledes matematik, frem for at bruge temaet i introforløbet om algebra.

Alternativt kan den ønskede løsningsstrategi med eksempler foræres til eleverne, hvorefter eleverne løser en række ligninger fysisk. Eleverne vil da stadig kunne give hinanden udfordringer, lede efter udfordringer der har flere eller ingen løsninger, og diskutere rationelle eller negative løsninger. På den måde overholdes den didaktiske kontrakt mens elevernes forvirring mindskes. Eleverne vil således ikke blive trænet i at løse problemer, men vil stadig arbejde med ligningsløsning. Hvis eleverne selv bryder den didaktiske kontrakt og tænker over sammenhængen mellem den algebraiske og den fysiske situation, vil disse elever stadig få en fysisk fornemmelse for ligningsløsning, som er temaets hovedformål.

Eleverne fik til hjemmeopgave at regne mindst tre opgaver fra Boons algebraspil (se bilag 2, s. 105). Nogle af de elever der havde lavet opgaverne, gav udtryk for at de var glade for at få opgaver der skulle løses elektronisk, da de godt kunne lide at arbejde med computeren. En del elever havde lavet mere end de tre opgaver der var påkrævet.

10.3 Ligevægt

Temaet *Ligevægt*, der blev afprøvet på tre klasser, er lettere for eleverne, at forstå end *Bægre & bønner*, derfor var en kort mundtlig introduktion til temaet brugbart i alle klasserne. De hjemmelavede vægte, lavet af trælister stof, snor og hæfteklammer, var ikke helt præcise, og sømmene og skruerne var ikke lavet til at veje præcis det samme. Selv om eleverne fik forskellige resultater og diskussionen tog udgangspunkt i målingerne fra nogle tilfældige grupper, er det min opfattelse at eleverne kunne forstå princippet i øvelsen og følge med i den fælles diskussion.

Eleverne udviste generelt god forståelse for hvordan vægten reagerede. Eksempelvis havde en gruppe set at et stort søm vejede mere end to små søm. De prøvede med et stort og tre små søm, og så at det nu var de tre små søm der vejede mest. En af eleverne i gruppen udtrykte, at så kunne det være, at det passede med to store søm og fem små søm, hvilket viste sig at være rigtigt. Det er min opfattelse at denne gruppes opfattelse af vægten var repræsentativ for flertallet af grupperne. De fleste elever virkede engagerede og arbejdede seriøst med opgaven. I nogle af grupperne virkede det som om eleverne gerne ville have haft en vægt hver, for at afprøve vejninger.

De forskellige grupper havde hver deres måde at notere deres resultater på. Faktisk var det de færreste der brugte korrekt algebraisk notation sammen med bogstaver som symboler for de forskellige elementer. En noterede "*2 store søm – 5 små søm*", en anden noterede slet ikke, en tredje noterede at et stort søm og tre små søm vejede det samme som to skruer og tre små søm ved at skrive "$1+3=2+3$". Under den fælles diskussion valgte jeg f.eks. at bruge A, B og C hvis det var hvad den første elev i diskussionen havde valgt som en fornuftig notation. Der var ingen elever der viste problemer med at forstå brugen af forkortelser.

Da nogle vejninger fra to forskellige grupper var noteret, f.eks. $3A=2B$ og $5A=2C$, foreslog eleverne selv, og viste god forståelse for, at ligningerne kunne ganges op så der f.eks. også var ligevægt ved $6A=4B$. De kom også frem til at de kunne lægge et søm eller en skrue i begge vægtskåle og stadig have ligevægt ved f.eks. $4A=2B+A$. Igen er det min opfattelse at langt de fleste elever havde en god forståelse for at den nye lighed må gælde når den oprindelige ligning kendes. Der var elever i alle klasserne der var i stand til at få en ligevægt hvor alle tre elementer indgik ved at lægge ligningerne sammen og få 8A=2B+2C. Efter nogle forklaringer er det min opfattelse at de fleste elever havde et billede af hvad det vil sige at lægge ligningerne sammen. Desværre nåede jeg ikke at notere mig hvordan eleverne i grupperne taklede opgaverne, hvor de skulle danne ligevægt med alle tre elementer, eller hvor de skulle regne en ligevægt ud mellem de to elementer, som hver især kun optrådte i den ene gruppe. Jeg ved dog at en gruppe blot vejede sig frem til et svar, og hvis ikke eleverne har haft en god notation i grupperne så de kunne overskue deres vejninger, er det ikke utænkeligt at det gør sig gældende for flere og måske endda størstedelen af grupperne.

Det blev straks en noget større udfordring, da eleverne skulle finde frem til vægten af sømmene og skruerne ved hjælp af et lod, som vejede mindre end det letteste element. Generelt havde eleverne den opfattelse, at det ikke kunne lade sig gøre at veje noget der f.eks. vejede 5g når de kun havde et lod på 1g til rådighed. Da eleverne ikke tidligere havde løst to ligninger med to ubekendte, overvejede de ikke at en ligevægt hvori loddet indgik, kunne bruges til noget, når vejningen ikke giver vægten af elementerne. Flere grupper så i stedet på hvor meget vægten vippede når loddet blev lagt i, og sammenlignede med de bevægelser de tidligere havde erfaret. Herudfra gættede de på hvor meget et af elementerne vejede, og kunne herudfra se hvor meget de øvrige elementer vejede. En gruppe så f.eks. at hvis der lå et 1g lod i den ene vægtskål, og den anden var tom, svarede udsvinget til at der lå et 1g lod i den ene vægtskål og et lille søm i den anden vægtskål. Heraf konkluderede de at et lille søm måtte veje 2g. Under diskussionen var det vanskeligt at finde en gruppe der havde lavet en ligevægt hvori loddet indgik, og der var ingen der havde fundet vægten af elementerne ud fra to vejninger som f.eks. $2A + 1 = C$ og $5A = 2C$. Selv om det er svært at sige om eleverne forstår hvad der sker på tavlen mener jeg, at ligevægte er et godt billede at give eleverne. Det viste sig nyttigt med et billede af en vægtskål til at forklare, at $2A + 1$ dobles op ved at gange både $2A$ og 1 med 2. Eleverne lod til at forstå at hvis to små søm og et lod vejer det samme som et stort søm, så skal der også to lodder i vægtskålen med fire små søm, hvis der skal laves ligevægt med to store søm.

Det er min opfattelse at formålet med øvelserne, nemlig at få et billede sat på ligningsløsning, opnå en strukturel forståelse for lighedsbegrebet, samt forståelse for simpel ligningsløsning er lykkedes for en stor del af eleverne. Der var elever der udtrykte at de nu begyndte at forstå ligninger, mens andre synes det var noget mærkeligt noget at regne med søm og skruer. En elev sagde at det var en god måde at lære matematik på, at få noget mellem hænderne, mens en anden sagde at det var godt at se hvad matematik kan bruges til i praksis. Selv om jeg observerede en elev der fandt øvelserne for lette, og meldte sig ud af gruppen før de virkelige udfordringer dukkede op, er det min opfattelse at de fleste elever hyggede sig samtidig med at de blev fagligt udfordret på hver deres niveau. Da personlig evaluering dvs. en mundtlig diskussion om temaets udbytte, ikke var mulig at gennemføre for hver enkelt elev, kan jeg ikke sige om eleverne opnåede en reel forståelse af sammenhængen mellem de fysiske øvelser og de algebraiske koncepter.

Hvis eleverne skal have mulighed for at finde vægten af hvert af elementerne, bør de vejledes bedre gennem arbejdsarket. Her tænker jeg på en ramme, hvor de bliver bedt om at finde en ligevægt, hvori loddet indgår sammen med to andre elementer. Herudfra kan de blive bedt om at tænke over, om denne vejning sammen med en tidligere vejning, kan fortælle noget om vægten af elementerne. Det vil ligeledes være en fordel, hvis denne øvelse kommer på et andet arbejdsark efter en klassediskussion, så eleverne har set på hvordan de kan kombinere to ligheder og finde frem til en ny. Der var ca. 31 elever i hver testklasse, og med den størrelse, er det ikke tidsmæssigt muligt, at underviseren mundtligt guider hver enkelt elev eller gruppe til, at komme gennem denne proces. Jeg har ikke afprøvet muligheden for, at guide en række elever, og lade disse elever guide de øvrige elever i forbindelse med dette introforløb.

10.4 Arealer

Temaet *Arealer* er afprøvet på mine egne to klasser. Efter en indledning på klassen, hvori jeg forklarede eleverne at de skulle arbejde på forståelse af algebra ved hjælp af geometriske illustrationer, og efter en gennemgang af arket *Algebra – indledning*, fik eleverne dette ark samt de to arbejdsark og opgavearket udleveret sammen. Det var en udfordring for eleverne at se sammenhængen mellem algebraen og den geometriske illustration. De svageste elever havde svært ved at forstå at arealet af et rektangel med sidelængderne 3 og a, er 3a, som er en forudsætning der er nødvendig for at forstå resten af øvelserne. Størstedelen af eleverne var i stand til at opskrive en lighed ud fra figur 2 på arbejdsark 1, der viser et rektangel med højden $2x$ og grundlinjen $x + y$. Der var dog en del elever, som ikke kunne regne ud hvad opgaven gik ud på, og derfor måtte have yderligere forklaring. Det gav større problemer når eleverne geometrisk skulle vise at $4a + ab = a(4 + b)$. Her måtte jeg ofte forklare hvad meningen med opgaven var, og observerede flere elever der uafhængig af hinanden tegnede et rektangel med højden $4a$ og grundlinjen $a + b$.

Under diskussionen havde eleverne svært ved at sætte ord på, hvorfor figur 1 på arbejdsark 1 kan kobles sammen med ligningen $a(b + c) = ab + bc$, selv om de selv mente, at have forstået det. I begge klasser var der elever der svarede rigtigt på hvilken ligning jeg kunne opskrive ud fra den geometriske illustration af et rektangel med højden h og grundlinjen $g + 2h$. Det gav straks større problemer at sætte $2x$ uden for en parentes i udtrykket $4x + 2xy$. Eleverne kom her med følgende forslag: $2x(4x + 2xy)$, $2x(2x + y)$, $2(2x + y)$ og $2x(2 + y)$. Efter en lille snak om hvorfor det sidste forslag er det rigtige, spurgte jeg om eleverne havde nogenlunde styr på det her. Da det eneste svar jeg fik, var at jeg ikke lige måtte viske ud endnu, må jeg desværre erkende, at det ikke lykkedes at lære eleverne at faktorisere et udtryk på en enkelt lektion.

Da diskussionen nåede til multiplikation af toleddede størrelser og kvadratsætningerne, havde eleverne så svært ved at forklare sammenhængen mellem algebraen og geometrien, at diskussionen udviklede sig til at være meget lidt præget af eleverne, og mere undervisning fra min side, hvilket ikke var hensigten med diskussionen. Eleverne virkede til at kunne se sammenhængen mellem kvadratsætningernes algebraiske og geometriske fremstilling. Jeg viste dem hvordan de kunne regne parenteser med toleddede størrelser sammen ved hjælp af *pædagogbuerne*, som vist på figur 15 herunder.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Figur 15

Om eleverne forstod sammenhængen mellem ligningerne, der var konstrueret ud fra de geometriske illustrationer, og regnemetoden hvor hvert led multipliceres med hinanden, eller om de stiltiende valgte at acceptere regnemetoden, kan være meget individuelt. Efter temaet har jeg flere gange, enten geometrisk eller algebraisk, forklaret elever at $(a+b)^2$ ikke er det samme som a^2+b^2. Nødvendigheden heri kan naturligvis skyldes manglende opmærksomhed fra eleverne, men det har vist sig at være rigtigt svært at få eleverne til at se geometrien for sig i disse opgaver. Ved en forespørgsel viste det sig at der var flere elever der syntes algebraen blev sværere af at skulle forklares geometrisk, end der var elever der synes det blev lettere. Efter at have set på produktet af to toleddede størrelser ud fra en geometrisk illustration, spurgte jeg i den ene klasse hvor mange der havde set det i grundskolen. Kun 3 ud af 31 elever markerede. Ifølge fælles mål 2009 for grundskolen (se s. 12) skal eleverne fremover se geometriske repræsentationer af regneregler i grundskolens sidste klasser. Derfor vil der formodentligt fremover være flere elever i grundskolen, der geometrisk også ser hvordan toleddede størrelser multipliceres.

10.5 Brøker

Temaet *Brøker* blev afprøvet på mine to egne klasser, og var mest tænkt som en opsummering fra grundskolens brøkregning, med større vægt på den algebraiske notation frem for den aritmetiske notation. Eleverne havde ikke på de få timer fået oparbejdet en tryghed ved bogstavregning, og flere gav udtryk for at det var forvirrende og svært. Jeg bad under klassediskussionen eleverne redegøre for hvordan to brøker adderes, subtraheres, multipliceres og divideres. En lille gruppe elever kunne ud fra figur 1 på opgavearket redegøre for addition. Der var mere tøven ved subtraktion, og ved de øvrige forklaringer måtte eleverne stå af. Det bedste svar jeg fik da jeg blev konkret og spurgte ind til division med en halv har jeg valgt at gengive her (dialog mellem underviser U og elev E):

U: *Er der nogle der kan forklare hvad der sker når man deler med en halv?*

E: *Så ganger man med to*

U: *Hvorfor?*

E: *En halv er mindre end 1, så det bliver større… det er svært at forklare*

Jeg havde forventet at en af eleverne brugte det eksempel der stod på forklaringsarket, og da jeg kom med eksemplet under diskussionen, virkede det på eleverne som om det var en helt ny forklaring de aldrig havde hørt før. Det er ikke mit indtryk at eleverne generelt lærte ret meget af denne øvelse. Eleverne ved ikke hvad det vil sige at arbejde med matematik på et generelt plan. Under temaet *Potens & rod*, samt da eleverne senere arbejdede med geometri og trigonometri, troede mange af eleverne at et eksempel var nok til at bevise en sætning. Dvs. generelt forstod eleverne at bogstaver kan bruges som pladsholdere for ukendte størrelser, men for mange af eleverne gav det ikke mening at regne med bogstaver de ikke skulle finde værdien af. For de uopmærksomme elever kan forklaringsarket til brøkregning være med til at forstærke denne opfattelse, at eksempler er gangbare beviser, da de illustrationer eleverne bliver bedt om at forklare brøkregnereglerne ud fra, netop er eksempler frem for generaliseringer. For disse elever var det først under diskussionen regnereglerne blev generaliseret, og har de ikke selvstændigt arbejdet videre med denne tankemåde, gav generaliseringer herefter stadig ikke mening for dem.

Færdighedstesten indeholdt otte spørgsmål der skulle give et billede af elevernes evne til, at beregne summen eller differensen af to brøker. Eleverne blev her bedt om at sætte brøkerne på fælles brøkstreg og efterfølgende reducere udtrykket. Testen indeholdt også nogle opgaver hvor eleverne skulle multiplicere eller dividere brøker i algebraiske udtryk, men det er desværre kun en lille del af eleverne der har svaret på disse spørgsmål. Det kan skyldes at disse opgaver kom sent i testen, og eleverne dermed ikke nåede at regne på opgaverne, eller at eleverne fandt opgaverne for svære at løse. Resultatet af de otte opgaver ses i figur 16 herunder.

Udtryk		Klasse A		Klasse B		Resultat	
		Rigtigt	Forkert	Rigtigt	Forkert	Rigtigt	Forkert
44	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$	15	15	16	13	53%	47%
45	$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$	19	11	21	8	68%	32%
46	$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$	17	13	19	10	61%	39%
47	$\frac{4}{a}+\frac{1}{2}$	4	26	5	24	15%	85%
48	$\frac{3a}{5b}+\frac{5a}{3b}$	9	21	10	19	32%	68%

49	$\frac{2a}{3}+\frac{a}{4}$	15	15	10	19	42%	58%
50	$\frac{a+b}{c}+\frac{2a+b}{3c}$	15	15	10	19	42%	58%
51	$\frac{a+b}{c}-\frac{2a+b}{3c}$	8	22	9	20	29%	71%

Figur 16

Ikke overraskende er eleverne bedst til at reducere de simple aritmetiske udtryk. I udtryk 44 undlader tretten af eleverne, jævnt fordelt i de to klasser, at forkorte brøken. På trods af en korrekt værdi, er disse besvarelser derfor blevet bedømt ikke korrekte. I et tidligere spørgsmål hvor eleverne skal forkorte brøken $\frac{39}{13}$, svarer tolv af de 59 elever $\frac{3}{1}$. Det viser at eleverne ikke er trygge ved at reducere en brøk eller er i tvivl om hvordan det matematiske sprog skal forstås. Det kan virke overraskende at der ikke er flere elever der formår at reducere udtryk 47. Mange af eleverne har undladt at besvare dette spørgsmål, hvilket kan skyldes at de ikke ved hvad de skal forlænge brøken med, når de ikke kender værdien af a. Blandt de elever der har svaret forkert, har tolv elever svaret $\frac{5}{2a}$. Det er generelt blandt fejlbesvarelserne, at eleverne ikke formår at forlænge $\frac{1}{2}$ med a.

Der er således en del elever der har problemer med helt grundlæggende aritmetiske brøkregning, mens størstedelen af eleverne har problemer med algebraisk brøkregning.

10.6 Potens & rod

Temaet *Potens & rod* der blev afprøvet på mine egen to klasser, var svært for eleverne. Jeg startede med at fortælle eleverne hvad temaets formål var og hvad de skulle arbejde med. For at vise eleverne hvilke teknikker og tankegang jeg forestillede mig, at de ville benytte til at løse opgaven på arbejdsark 1, beviste jeg at regneregel 7 fra arbejdsark 1 gælder. Beviset stod også på arbejdsarket så eleverne efterfølgende kunne hente inspiration til at vise om de øvrige regneregler gælder. Jeg viste også at regneregel 8 ikke gælder, for at eleverne havde set hvordan en regneregel kan modbevises. Eleverne arbejdede med opgaven til de fleste var færdige. Under klassediskussionen blev der diskuteret hvilke regneregler fra arbejdsark 1 der var rigtige, og hvorfor de var rigtige. Elevernes strategier gik hovedsageligt på at sætte tal ind og se om det virkede. Det er også en ganske fornuftigt start, men her troede eleverne at de var færdige. Som jeg skrev i forrige afsnit havde eleverne med få undtagelser, rigtigt svært ved at generalisere deres forklaringer. Som eksempel herpå gengiver jeg en del af klassediskussionen, hvor eleven der kommer på banen som nummer otte er en af disse ganske få undtagelser. Eleverne omtaler eksponenten som potensen, hvilket jeg valgte at vente med at rette til efter diskussionen, for ikke at bryde de tanker der måtte opstå under diskussionen.

U: Har I fundet ud af hvilke af de ni potentielle regneregler der er rigtige?

E1: Ja

U: Hvad er I kommet frem til med den første? (skriver regnereglen op på tavlen)

E2: Den er rigtig nok

U: Hvorfor?

E2: Hvorfor den er det?

U: Ja

E2: Det ved jeg ikke, fordi jeg har sat nogle tal ind og det virker

U: Du har sat nogle tal ind og set at det virker. (skriver "sæt tal ind" på tavlen). Kan vi være sikre på at det også passer, hvis vi vælger at sætte nogle andre tal ind, end dem du har valgt?

E3: Er det ikke fordi, at når man ganger, så lægger man potenserne sammen?

U: Jo, hvorfor gør vi det?

E4: Er det ikke fordi vi har samme rod?

E5: Når vi har samme rod så bliver potenserne lagt sammen

E4: Er det ikke ligesom det eksempel vi lavede med 7'eren

U: Hvad lavede vi med 7'eren?

E4: Der plussede vi også potenserne

U: Ja?.. (kort pause) Kan vi overføre metoden hertil? (længere pause) Kan vi ikke gøre andet, end bare at sætte tal ind?

E6: Jo

U: Jo?.. Hvad kan vi gøre?

E6: Kan vi ikke skrive 3^2 gange 3^3

U: (Skriver "$3^2 \cdot 3^3$" på tavlen) Ja der har vi også bare sat nogle tal ind. Hvad giver det?

E7: Er det ikke det samme?

E6: Øhh..

E4: 3^5

U: Ja hvorfor giver det det?

E4: Fordi man plusser potensen

U: Det er jo det vi skal finde ud af om vi må

E8: Hvis man har a^2 *gange* a^3 *kan man skrive* $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, *og det er* a^5. *Er det ikke det?*

U: Jo (vender sig mod tavlen) her står der 3·3 (peger på 3^2*) og her står der 3·3·3 (skiver "*$3 \cdot 3$*" og "*$3 \cdot 3 \cdot 3$*" på tavlen)*

E8: Og det er det samme

U: Ja så det er 3^5

U: (Viser hvordan regnereglen kan vises generelt, herunder forklarer forskellen på potensen og eksponenten, og fortæller hvorfor det skal vises at reglerne gælder generelt og ikke kun for bestemte tal)

Som det fremgår af diskussionen herover, ved eleverne tydeligvis ikke hvad det er, jeg som underviser vil have dem til. E4 har regnet ud at jeg fisker efter noget der ligner det bevis jeg gav på tavlen for at den 7. regel gælder. Om E4 har genlæst beviset for regel nummer 7 på arbejdsarket vides ikke, men tydeligvis var han som størstedelen af klassen ikke i stand til at gennemskue hvad essensen i beviset var.

Eleverne kunne til en vis grad følge med, og forstå de udregninger der blev gennemgået når der var konkrete eksponenter som 2 og 3. Men når jeg eller en dygtig elev generaliserede, og brugte eksponenterne p og q i samme udregninger, blev det for abstrakt for flere elever.

E8 kunne fortælle at regel 3; $a^p + b^p = (a+b)^p$ ikke gælder, med begrundelse om at første kvadratsætning siger noget andet. Herefter forventede jeg at dette argument blev genbrugt for regel 4; $a^p \cdot b^p = (a+b)^p$. Her var der dog en elev E9 som var helt sikker på at reglen måtte gælde, hun kunne dog ikke forklare hvorfor. Da det alligevel viste sig ikke at være tilfældet, mente E9 at der ikke kunne være nogen tvivl om at regel 5; $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ måtte gælde. Da jeg pointerede at hendes argument med at hun bare var sikker i sin sag, ikke kunne holde jævnfør diskussionen for regel 4, uddybede hun med, at når de to foregående ikke gjaldt, måtte regel 5 gælde. Hun har tilsyneladende troet, at hun kunne snyde mig og resten af klassen til at tro at hun havde en fornemmelse for de matematiske regneregler, og havde hun ramt rigtigt i første hug, er det da ikke utænkeligt at hun i en gruppe hvor det har vist sig, at eleverne har vanskeligt ved at argumentere for deres sag, ville have haft midlertidigt held med det.

Da diskussionerne om potenser tog længere tid end forudset, lod jeg i begge klasser arbejdet med arbejdsark 2 der bl.a. omhandler rødder, være hjemmearbejde til den næste undervisningsgang, hvor jeg tog fat på diskussionen. Nogle ganske få elever havde fået lavet nogle af reglerne om til regneregler der kunne bruges for rødder, mens størstedelen af eleverne ikke kunne følge med på dette abstraktionsniveau.

Jeg vil beskrive en del af undervisningsgangen for den ene klasse: Efter at have diskuteret rammen med a^0, a^{-1} og a^{-p} skulle eleverne forklare hvad kvadratrødder var. Eleverne havde alle den opfattelse, at kvadratroden af f.eks. 9, er det positive tal der skal ganges med sig selv for at få 9. Eleverne måtte herudfra erkende at $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Det er dog ikke ensbetydende med, at eleverne forstod at udsagnet er sandt. Ud fra regel 1 på arbejdsarket viste jeg eleverne at $a^{\frac{1}{2}}$ er et tal der ganget med sig selv giver a, og som derfor må svare til kvadratroden af a (på arbejdsark 2 vises det ved hjælp af regel 6). Det tog lidt tid før eleverne accepterede det, og jeg måtte gennemgå det nogle gange. Herudfra fandt eleverne regneregler for $\sqrt{a}\sqrt{b}$ og $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ud fra omskrivninger til potenser. Der var 5-6 elever ud af 30 der viste forståelse for dette. Efter nogle eksempler hvor der var lige så få elever der viste forståelse, bad jeg de resterende elever acceptere, at når noget opløftes til en halv, svarer det til at tage kvadratroden af dette. Da jeg herefter bad om at få $\left(\frac{2x}{a}\right)^{1/2}$ omskrevet til en kvadratrod markerede i alt 7 elever.

Jeg må konkludere, at den mentale vej fra noget eleverne kan sætte billeder på, og til sammenhængen mellem potenser og rødder er for lang, og at dette tema derfor kræver et højere abstraktionsniveau end eleverne magter. Nogle uger senere viste klassen stor usikkerhed om hvorfor $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$, selv om eleverne ikke i lige så høj grad var i tvivl om at $\sqrt{5}^2 = 5$. Formodentligt skyldes det, at eleverne oftere skal hæve en kvadratrod ved at sætte hele udtrykket i anden potens.

10.7 Statistik over evalueringsarket

Alle eleverne blev bedt om at lave evalueringsarket, og fik en uge til dette. Opgaverne er bevidst lavet, så de er en udfordring for elever i starten af gymnasieskolen, for at teste om eleverne kan nå ud til den grænse, jeg vil kalde en god forståelse for de grundlæggende algebraiske færdigheder. Jeg har for nogle opgaver fundet det relevant, at angive om eleven har brugt algebra eller eleven har fundet resultatet på anden vis. Kolonnerne med ”Forkert” indeholder også manglende besvarelser. Fra klasse A hvor eleverne havde matematik som studieretningsfag, modtog jeg 24 besvarelser, og fra klasse B, der ikke havde matematik som studieretningsfag modtog jeg 17 besvarelser.

Opgave 1 skal evaluere elevernes evne i at løse lineære problemer ud fra en sproglig formulering. Baggrunden herfor er temaet *Bægre & bønner*, samt den undersøgende tilgang til problemerne der er blevet lagt op til i forløbet. En del af eleverne var frustrerede over, hvordan opgaven skulle løses. For at løsne op for denne frustration, og for ikke at forære eleverne en løsning de ikke skulle tænke over, valgte jeg nogle få dage før afleveringsfristen, at fortælle dem at problemet f.eks. kan opfattes som om Søren og Inge begge startede fra Inges hjem, men Søren fik et forspring således at stopuret først blev sat i gang ved Inges start, da Søren havde kørt de første 12,5 km. Dette illustrerede jeg med to rette linjer. Den ene med startværdien 12,5km og en hældning på 30km/t, og den anden med startværdien 0km og hældningen 80km/t. Skolen måtte så ligge der hvor Inge indhentede Søren. Da vi endnu ikke var nået til den lineære udvikling forvirrede den illustrative forklaring eleverne, og nogle elever gav udtryk for at de havde løst opgaven på en anden måde. De elever i klasse B der ikke har løst opgaven algebraisk, har derfor hovedsageligt løst opgaven grafisk. Statistik over elevernes resultater kan ses i figur 17 herunder.

Opg. 1	Rigtigt - algebra	Rigtigt - andet	Forkert - algebra	Forkert – andet
A	15	1	2	6
B	5	6	0	6
Resultat	49%	17%	5%	29%

Figur 17

Mange elever virkede under løsningen af opgaven uselvstændige. De havde meget svært ved at forestille sig, hvordan de kunne komme frem til en løsning. At det lykkedes for halvdelen af eleverne at komme frem til en korrekt algebraisk løsning, kan skyldes at de har søgt råd hos hinanden.

I opgave 2 skal eleverne vise om de, efter en dobbeltlektion hvor de med arealer viser hvordan parenteser med flerleddede størrelser multipliceres, kan bruge kvadratsætningerne og holde styr på negative parenteser, ved at reducere udtrykket $(x+a)^2-(x-a)^2$. Da der var mange elever der lavede den samme fejl, har jeg i figur 18 angivet elevernes resultater. Kolonnen "4ax - fejl" dækker over de elever, der havde fejl i udregningen, men alligevel angav det rigtige resultat.

Opg. 2	4ax – korrekt	4ax - fejl	$2a^2$	$2a^2+2x^2$	Andet
A	7	2	8	3	4
B	8	0	2	1	6
Resultat	37%	5%	24%	10%	24%

Figur 18

De elever der kommer frem til resultatet $2a^2$, har ikke et visuelt billede af hvad et kvadrat er når det skrives algebraisk, da de glemmer det dobbelte produkt i udregningen. Til gengæld har de helt styr på hvordan en negativ parentes skal behandles. Under den sidste kolonne "Andet" ligger der nogle elever der huskede det dobbelte produkt, men ikke formåede at holde styr på fortegnene under udregningen. For at få eleverne til at rette opmærksomhed mod kvadratsætningerne, lavede jeg en lille sang over de to første kvadratsætninger og lagde dem på youtube.com (se bilag 5, s. 127). Eleverne var begejstrede, og var sikre på at de nu altid ville huske kvadratsætningerne. Dette skulle naturligvis undersøges, derfor testede jeg efterfølgende elevernes færdigheder i de to første kvadratsætninger i en øvelse, hvor eleverne ikke blev mindet om sangen om kvadratsætningerne. Jeg beskriver og evaluerer senere denne øvelse (se kap. 10.8.2, s. 91).

Opgave 3 er designet til at give flere problemer for eleverne. Eleverne skal isolere m i ligningen $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. Hertil skal eleverne gennemskue strukturen på trods af flere ubekendte med bogstavbetegnelser de ikke er vant til, og sætte m uden for en parentes. Herefter skal ligheden deles med hele denne parentes. Der var nogle få elever som havde fået sat m uden for en parentes, men alligevel ikke havde fået isoleret m korrekt, mens der i klasse A var to elever der gav det rigtige svar, men ikke havde de rigtige udregninger med. Ingen af disse besvarelser er blevet bedømt som værende korrekte. Statistik over opgaven ses i figur 19.

Opg. 3	Rigtig	Forkert
A	2	22
B	8	9
Resultat	24%	76%

Figur 19

Da der på arbejdsarkene næsten ingen fokus er på, at sætte uden for en parentes, og da eleverne under klassediskussionen havde svært ved at faktorisere udtryk, undrer det mig ikke at eleverne har svært ved denne opgave. Det er dog bemærkelsesværdigt, at klasse B her klarer sig væsentligt bedre end klasse A, uden at det samme gør sig gældende i de øvrige opgaver. Det kan skyldes klasserumskulturen, hvor løsningen vandrer blandt eleverne, når først der er en eller flere der har fundet en løsning.

Arbejdsarket under temaet *Ligevægt* er som tidligere beskrevet ikke særligt velegnet, til at introducere to ligninger med to ubekendte, da eleverne ikke af sig selv fandt ligevægte hvori det udleverede lod indgik. Der blev dog brugt en ekstra dobbeltlektion, så eleverne fik kendskab til, og øvelse i, at løse ligningssystemer ved brug af lige store koefficienters metode såvel som substitutionsmetoden. Der var derfor mange af eleverne, der benyttede en brugbar metode til at løse opgave 4, hvor eleverne skulle løse ligningssystemet bestående af ligningerne $A - B = 1$ *og* $4(A + 2B) = 0$. Ikke alle af disse elever nåede dog frem til det rigtige resultat. Statistik over besvarelserne ses i figur 20.

Opg. 4	Rigtig	Forkert
A	11	13
B	5	12
Resultat	39%	61%

Figur 20

Besvarelserne viser at eleverne er blevet ret sikre i brugen af den distributive lov. Således ophævede næsten alle eleverne parentesen i den sidste ligning på korrekt vis. Nogle elever valgte at substituere værdien af A eller B fra den første ligning ind i den nederste før parentesen blev hævet, og kun en enkelt elev valgte at dele den sidste ligning med 4 før parentesen blev hævet.

Halvdelen af eleverne har lært sig en brugbar metode til, at løse et simpelt ligningssystem. Da ikke alle disse elever behersker de nødvendige algebraiske færdigheder til at foretage korrekte omskrivninger, fejler størstedelen af eleverne således i at løse ligningssystemet.

Ekstra-opgaven er en klassisk opgave jeg har taget fra Kieran (1992, s. 403), hvor eleven skal vise forståelse for at opskrive et algebraisk ligningssystem ud fra en sprogligt formuleret opgave. Her er det interessant om eleverne vælger at løse opgaven algebraisk eller aritmetisk. Da opgaven var frivillig, har en større del af eleverne valgt ikke at løse denne opgave, hvilket fremgår af statistikken i figur 21.

Ekstra	Rigtig – algebra	Rigtig – andet	Forkert	Ikke besvaret
A	6	6	3	9
B	3	6	4	4
Resultat	22%	29%	17%	32%

Figur 21

Denne opgave var lettere for eleverne at gennemskue end opgave 1. Jeg oplevede ikke at eleverne havde de samme frustrationer over denne opgave, og selv nogle af de svage elever kunne svare på denne opgave. De havde angivet svaret uden dokumentation, og deres besvarelser figurerer under ”Rigtigt – andet” i figur 21. Herunder ligger også besvarelser, der er dokumenteret ved hjælp af aritmetiske udregninger, som ligger tæt op af de algebraiske besvarelser.

10.8 Evaluering af specifikke opgaver

Jeg har fundet det relevant, at evaluere flere af de specifikke opgaver jeg har stillet eleverne, for at teste deres evne i algebraiske omskrivninger og bevisførelse. Derfor har jeg valgt at se nærmere på opgave 160 fra Carstensen og Frandsen (1997b), samt en argumentationsøvelse (se bilag 6, s. 128) jeg har designet, så der i besvarelsen skal lægges vægt på forklaringer af de algebraiske omskrivninger.

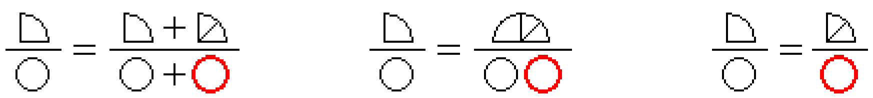
10.8.1 Opgave 160

Opgave 160 fra Carstensen og Frandsen (1997b) er for svær for størstedelen af eleverne i 1. gymnasieklasse. Jeg ville se, om mine elever kunne klare udfordringen, og havde forberedt følgende skitserede løsning der bl.a. indeholder substitution og forbehold mod at dele med nul:

Vis, at hvis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *så er* $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

Det ses let at hvis $a = 0$, da må $c = 0$, og da gælder regnereglen. Antag modsat at $a \neq 0$. Da findes et tal r, så $ra = c$, nemlig tallet $r = \frac{c}{a}$. Substitueres $c = ra$ ind i den første ligning, ses det at $d = rb$. Ved at forlænge $\frac{a}{b}$ med $(1 + r)$ ses det at regnereglen gælder for alle tal.

Tre af mine dygtigste elever løste opgaven på hver deres måde. Den første metode er baseret på de øvelser eleverne har arbejdet med under brøkregning, og eleven forsøgte herudfra, at forklare at forholdet ikke vil ændre sig, selv om tællerne lægges sammen og nævnerne lægges sammen. Jeg vil ikke eftergøre hendes forklaring, som ikke var fyldestgørende, men blot bringe hendes illustration (se figur 22), der viser hvordan hun forsøger at forklare regnereglen i samme stil, som hun lærte at forklare nogle af de grundlæggende brøkregneregler fra forklaringsarket til brøkregnereglerne. Hun får dog algebra og grafiske illustrationer blandet sammen på en uheldig måde.



Figur 22

Den anden metode bygger på ensvinklede trekanter (se figur 23), som vi netop var gået i gang med da jeg gav eleverne opgaven. For forståelsens skyld har jeg navngivet trekanter og sider. Eleven forsøgte at forklare at problemet kunne forstås således, at hvis der er givet to ensvinklede trekanter T_1 med siderne a_1, b_1 og c_1 og T_2 med siderne a_2, b_2 og c_2, da vil de også være ensvinklede med trekanten T_{12} med siderne a_1+a_2, b_1+b_2 og c_1+c_2, og dermed vil forholdet $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ og $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ være konstant. Han havde svært ved at argumentere for sin idé, men det er interessant at se hvordan eleven forsøgte at anvende det sidste han havde lært, som Schoenfeld (1992) nævner er typisk for eleverne.

Figur 23

Den tredje metode er et deduktivt algebraisk bevis der minder om mit forslag. Eleven viser i stedet den modsatte implikation nemlig $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ved at omskrive ligheden til $\frac{b+d}{b} = \frac{a+c}{a}$ og herfra reducere udsagnet til $1 + \frac{d}{b} = 1 + \frac{c}{a}$. Herfra omskrev han udsagnet til det ønskede. Jeg havde ikke undervist eleverne i forskellen på implikation og biimplikation, og eleven har således set sine omskrivninger som værende gældende begge veje. Eleven overvejede heller ikke om der kunne være nogle problemer forbundet med at dele med a.

10.8.2 Argumentationsøvelse

Argumentationsøvelsen (se bilag 6, s. 128) blev delt ud til eleverne i starten af november, som en øvelse til eleverne i at forklare og argumentere for udregninger og beviser. Øvelsen skal evaluere om eleverne er i stand til at forklare omskrivningerne i en udregning. Herudover skal den vise, om eleverne har lært noget af sangen om de to første kvadratsætninger. Endelig giver jeg eleverne mulighed for at vise om de har taget forklaringen til sig, om hvorfor den distributive lov gælder. De er under introduktionsforløbet blevet præsenteret for to forklaringer. Den første er, at skal f.eks. en mængde skruer og søm i en skål firedobles, skal der herefter være fire gange så mange af både sømmene og skruerne. Den anden forklaring er geometrisk, hvor venstresiden ses som et areal af et rektangel med højden 4 og længen

$a + b$, mens højresiden ses som arealet af to rektangler begge med højden 4, og den ene med længden a og den anden med længden b.

Eleverne fik ingen mundtlig introduktion til øvelsen. Nogle af eleverne reagerede dog ret forfærdede over mængden af tekst i øvelsesvejledningen. Jeg tilbød derfor eleverne, at læse øvelsesbeskrivelsen højt i et andet lokale, for dem der havde ønske herom. Fem ud af 30 elever i klasse A, og ti ud af 28 elever i klasse B takkede ja til tilbuddet. Eleverne var gode til at arbejde selvstændigt med øvelsen. Der var ingen der efterfølgende spurgte hvad opgaven gik ud på. Enkelte elever bad om hjælp til at gennemskue udregningerne i del 2 og løse ligningssystemet i del 3. Jeg undlod, at give forklaringer på udregningerne, og spurgte i stedet ind til, hvad eleven selv var i stand til at regne ud. Herunder var der nogle elever der tydeligvis ikke kunne genkende kvadratsætningen i del 3, og en enkelt elev var selv efter flere vejledende spørgsmål ikke i stand til at omskrive $(x-4)^2$ til $(x-4)(x-4)$ selv om eleven var hurtig til at fortælle, at når noget sættes i anden potens, svarer det til at det skal ganges med sig selv.

Eleverne fik en dobbelt lektion til at løse opgaven, og fik herefter en afleveringsfrist på en uge til at lave opgaven. 28 elever i klasse A, og 21 elever i klasse B afleverede opgaven. Jeg evaluerer øvelsen ud fra statistikken i figur 24 herunder.

Argumentationsøvelsen	Klasse A	Klasse B	Resultat
Afleverede del 1	4	0	8%
Så kvadratsætningen (Korrekt udregning)	17	5	45%
Så kvadratsætningen (Fejlagtig udregning)	1	0	2%
Så ikke kvadratsætningen (Korrekt udregning)	4	9	27%
Så ikke kvadratsætningen (Fejlagtig udregning)	6	7	27%
Fandt den rigtige løsning i del 3	9	11	41%
Standard svar i ekstraopgaven	12	6	37%
Andre svar i ekstraopgaven	0	1	2%
Undladt at besvare ekstraopgaven	16	14	61%

Figur 24

Eleverne fik adgang til øvelsen i elektronisk form, og selv om der udtrykkeligt står i øvelsesvejledningen, at de ikke skal aflevere del 1, valgte 4 elever alligevel at aflevere denne del. Langt de fleste elever formåede dog at læse og forstå denne del af opgaveformuleringen.

Om det skyldes forklaringen til del 1, min sang på youtube.com (se bilag 5, 127) eller en helt tredje faktor, at 71% af eleverne løste kvadratsætningen i del 3, kan jeg ikke sige, men eleverne har gjort betydelig fremskridt med hensyn til de to første kvadratsætninger siden de afleverede evalueringsarket. Elever der ikke nævnte kvadratsætningerne med ord i forklaringen, er angivet som om de ikke så at disse sætninger kunne bruges. Ligeledes var der nogle elever der nævnte kvadratsætningerne, men ikke gjorde brug af dem. Jeg har noteret at disse elever så kvadratsætningerne.

Det lykkedes i alt 20 elever at løse ligningssystemet i del 3 korrekt, heraf var der nogle der havde fået hjælp af andre til løsningen. Forklaringsmæssigt vil jeg kategorisere 24 besvarelser dvs. ca. halvdelen, som værende gode. Her har jeg udelukkende vurderet elevens forståelse, og har ikke lagt vægt på deres sproglige færdigheder. Der er f.eks. flere elever der *plusser* og *minusser* tallene sammen. Der var en overvægt af elever, der valgte at løse ligningssystemet i del 3 ved hjælp af substitutionsmetoden, selv om lige store koefficienters metode var den første metode der blev indført hos eleverne, og jeg efterfølgende har forsøgt at lægge lige stor fokus på de to metoder. I del 2 bruges lige store koefficienters metode til at løse et ligningssystem, ved at addere de to ligninger i ligningssystemet. 51% af eleverne forklarede, at de lagde de to ligninger sammen. En enkelt elev forklarede, at de skulle trækkes fra hinanden, 27% af eleverne forklarede, at ligningerne ”*sættes sammen*” eller ”*samles*”. Dette skridt som er kernen i lige store koefficienters metode, havde halvdelen af eleverne således svært ved at forklare, hvilket formodentligt er grund til at størstedelen foretrækker substitutionsmetoden blandt de to metoder. Færdighedsmæssigt var der i del 3 flere elever, der korrekt isolerede y i ligningen $2y - 4x = 4$ til $y = 2x + 2$, men som fejlagtigt substituerede den fundne værdi ind i ligningen $(x-4)^2 = x^2 - y$ ved at skrive $(x-4)^2 = x^2 - 2x + 2$.

Størstedelen af eleverne (61%) forklarede omskrivningerne ved hjælp af den formelle metode. Langt de fleste af de øvrige elever (31%) brugte konsekvent den formelle metode ved multiplikation og divisions, mens de enten konsekvent brugte flyttemetoden eller vekslede mellem denne og den formelle metode ved addition og subtraktion. Hos de resterende elever var forklaringerne så uklare, at deres metode ikke kunne fastlægges. Således er der ingen af eleverne der med sikkerhed bruger flyttemetoden ved multiplikation og division, mens størstedelen af eleverne forklarer deres omskrivninger ud fra den formelle metode.

Der var ingen elever der forklarede den distributive lov ved hjælp af de visuelle forklaringer jeg havde givet dem i starten af skoleåret. På nær en besvarelse, lød samtlige besvarelser, som jeg har noteret som standard svar i statistikken, at når 4 ganges ind i parentesen, skal 4 ganges på begge led. Dette mener eleverne dermed tydeligvis, er en forklaring og ikke blot en konstatering. En enkelt elev gav et algebraisk bevis på omskrivningen. Selv om eleverne ikke bruger de forklaringer de blev præsenteret for i starten af forløbet, er der langt imellem elever der har problemer med at gange ind i en parentes. Da der har været mindre fokus på at sætte en størrelse uden for en parentes, har flere elever vanskeligt ved dette.

10.9 Evaluering af det samlede forløb

Mit forsøg på at gøre arbejdsarkene spændende, med yderst begrænset tekst, og forskellige rammetyper til teori, opgaver og ekstraopgaver, er ikke lykkedes optimalt. Under det tredje tema *Arealer*, bemærkede jeg kort tid efter at have udleveret arkene *Algebra – indledning*, samt de to arbejdsark og opgavearket, en elev der allerede var i gang med opgavearket. Jeg spurgte hvorfor hun ikke lavede opgaverne på arbejdsarkene først, og fik den forklaring at hun havde læst de tre foregående ark, men de indeholdt ikke nogle opgaver. Det vidner om at selv med den yderst begrænsede tekstmængde arkene indeholder, er der elever der opfatter teksten mellem opgaverne, som fyldstof de ikke behøver at forstå. Det viser at eleven ikke har bemærket, at opgaver og teori står i hver deres rammetype. Herudover viser det at den mundtlige forklaring samt den skriftlige forklaring på temaets første side, af vigtigheden i forståelsen af øvelserne, ikke har haft nogen effekt hos denne elev. I en senere opgave hvor eleverne skulle konstruere en kvart cirkel, der skulle være delt op så forskellige vinkler kunne aflæses på den, havde eleverne mundtligt fået beskrevet det færdige produkt, mens det af opgaveformuleringen tydeligt fremgik, at eleverne skulle beregne punkterne på cirkelperiferien ved hjælp af sinus og cosinus. Det var dog kun få elever der brugte den angivne fremgangsmåde, mens størstedelen af eleverne brugte passer og vinkelmåler. Selvom der i argumentationsøvelsen kun var 4 elever der mod hensigten afleverede del 1, vil jeg konkludere at en del elever der starter i gymnasieskolen ikke formår at læse og forstå en opgave.

På trods af Schoenfelds observationer, over elever der typisk bruger 1 minut på at læse en opgave og herefter forsøger at løse den på den første og bedste måde, har jeg ikke været nok opmærksom på, at eleverne skal undervises i at læse en opgave grundigt igennem, og forstå denne inden besvarelsen. Da dette er en endnu vigtigere forudsætning for at kunne forstå matematikken, end de grundlæggende algebraiske færdigheder, havde det ikke været uvæsentligt om jeg havde dedikeret en undervisningsgang til øvelser der skulle provokere eleverne til at mærke og forstå vigtigheden af denne evne.

Under det fjerde tema *Brøker*, gav nogle elever udtryk for at arkene var kedelige. De var blevet vandt til arkenes udseende og savnede noget nyt. Da jeg spurgte ind til deres holdning, havde de gerne set nogle farver samt nogle sjove illustrationer på arkene. Det viser at når eleverne har set en opstilling tilpas mange gange, så har den ikke længere den effekt at skabe nysgerrighed og interesse. Jeg kunne derfor lige så vel have lavet arkene uden rammeopstillingen og prioriteret noget sjovt i det ene hjørne, så eleven glædede sig til et nyt ark. Konklusionen herpå er at formen skal brydes en gang i mellem, der skal lidt sjove indfald ind, meget gerne med farver således at eleverne ikke ved hvordan den næste side er grafisk opbygget. Det genkendelige bliver kedeligt i længden. Under udarbejdelsen af elevarkene har jeg måtte give køb på nogle oplysninger som dermed er blevet hensat til slutningen af klassediskussionerne. Dog opnåede jeg ikke den ønskede effekt, at eleverne skulle se tekstmængden som en bagatel på højde med teksten i en tegneserie.

Jeg har under forløbet forsømt de to vigtige principper *lige ret* og *evaluering*. Med 31 elever i klasserne var det ikke muligt at nå rundt og give alle eleverne den fornødne hjælp. Jeg er kommet frem til at jeg bliver nødt til at trække mere på de stærke elever som hjælp til de svagere, hvis alle elever skal hjælpes. Da jeg ikke personligt kan nå at få en samtale med alle elever under elevarbejdet, er det derfor heller ikke muligt at lave den løbende evaluering. Heller ikke under klassediskussionen lykkedes det mig at få alle elever i tale. I en klasse med 31 elever er det for let for eleverne at gemme sig. Med så store klasser kan det være en fordel at udarbejde elektroniske test til at afslutte hver undervisningsgang, hvor eleverne kan få en automatiseret rettelse, og hvor en statistik over resultaterne bliver sendt til underviseren. På den måde kan eleverne selv løbende følge med i hvilke emner de er med i, og hvor de er hægtet af. Dette skal dog ses som en nødløsning til de store klasser, og kræver en større elektronisk opgavedatabase tilknyttet et let tilgængeligt værktøj. Det optimale er dog at klasserne ikke er større end underviseren kan nå rundt til alle eleverne under elevarbejdet.

En del af eleverne har udtrykt at de var glade for visualiseringen under de tre første temaer. Jeg ville gerne have brugt meget mere tid på dette forløb, og for mange elever var en enkelt dobbeltlektion med hvert tema ikke nok. At grundskolens nye fælles mål lægger mere vægt på de grundlæggende algebraiske færdigheder, giver eleverne mulighed for at arbejde mere i dybden med den grundlæggende algebra, så eleverne starter i gymnasieskolen med nogle grundlæggende algebraiske færdigheder og kundskaber. Herefter kan det vise sig at det afprøvede forløb ville give eleverne et større udbytte. Vippevægtene viste sig at være velegnet til at visualisere ligninger og ligningsløsning. Øvelsen skabte en fælles referenceramme, der var brugbar til at forklare hvorfor der må foretages det samme på begge sider af lighedstegnet, f.eks. gange op eller trække fra. Den kunne også bruges til at forklare hvorfor to ligninger må lægges sammen, som ved lige store koefficienters metode under løsning af ligningssystemer med flere ligninger. Ligeledes kan substitutionsmetoden forklares ud fra vægtprincippet, hvor noget byttes ud med noget andet der vejer det samme. Til at forklare hvordan flerleddet størrelser multipliceres, blev vægten brugt som billede på konsekvensen af en forkert udregning. Manipulation af udtryk kan foretages i en enkelt skål da vægten herved ikke må ændres. Her kan en fordybelse i illustrationer, som dem jeg har medtaget under temaet *Arealer,* samt øvelser hvor eleverne skal klippe og klistre, være gavnlig for forståelsen.

Jeg har i dette kapitel diskuteret de empiriske undersøgelser. Ikke alt er gået som jeg havde forventet. Mest opsigtsvækkende er det, at flere af eleverne mangler evnen til at læse og forstå en opgave når de starter i gymnasieskolen. Eleverne havde vanskeligheder ved at forstå hvad opgaven i temaet *Bægre & bønner* gik ud på. Jeg har under evalueringen bragt nogle forslag til alternative måder at implementere temaet i undervisningen. Det lykkedes mig ikke at visualisere temaet om *Potens & rod* på samme måde som det er lykkedes med de øvrige temaer. Dette kan være en medvirkende årsag til, at abstraktionsniveauet i temaet oversteg elevernes evner. Med temaet *Ligevægt*, har jeg ikke blot visualiseret lighedsbegrebet, men også gjort det fysisk, så eleverne kan få en naturlig og konkret tilgang til konceptet.

Jeg har bragt et forslag til forbedringer og udvidelse af temaet, som tager højde for elevernes vanskeligheder med øvelsen hvor elementernes vægt skal bestemmes. Jeg er kommet frem til at eleverne er glade for alternative indslag i undervisningen, som historien om de tre regnearter eller sangen om kvadratsætningerne, men kan ikke påvise at det har indvirkning på elevernes færdigheder. I næste kapitel vil jeg samle mine forslag til ændringer af forløbet, og skitsere et redesign af undervisningsforløbet.

11 Redesign af undervisningsforløbet

Jeg har under vurderingen af forløbet nævnt nogle muligheder for ændringer, og vil i dette kapitel kort skitsere et redesign af forløbet på fem dobbeltlektioner plus arbejdet med regnearternes hierarki.

Regnearternes hierarki bliver introduceret i den indledende lektion. Eleverne får øvelser hvor led og faktorer skal identificeres i forskellige udtryk. Herefter skal værdien af disse udtryk udregnes. Øvelserne der bl.a. skal indeholde parenteser, brøker og potenser, kan uddeles i elektronisk form, hvor eleverne får en automatisk tilbagemelding om hvorvidt de har løst opgaven korrekt. En afsluttende elektronisk test kan herefter evaluere eleverne, og præcisere hvilke områder eleven skal fokusere sin videre træning på. De samme øvelser udleveres på papir til de elever der ikke har medbragt en computer. Lektionen kan afsluttes med historien om de tre regnearter, som inddrages i et samarbejde med danskfaget. Som hjemmeopgave kan eleverne blive bedt om at spille et spil der er konstrueret til formålet, hvor færdigheder i hierarkiet trænes. Hvis progressionen i dette spil gør at eleven trænes i at se strukturer i algebraiske udtryk, kan det endvidere være et godt supplement til de følgende lektioner.

Selv om temaerne *Arealer* og *Brøker* gav eleverne en del problemer, kan det være hensigtsmæssigt at arbejde med manipulation af algebraiske udtryk før ligningsløsning. De to første dobbeltlektioner afsættes til arbejdet med at multiplicere flerleddede størrelser samt brøkregning. Jeg er ikke overbevist om at det i dette tilfælde er hensigtsmæssigt at arbejde med forståelsen før færdigheder. Derfor kan eleverne arbejde intensivt på at optræne deres færdigheder i første del af hver dobbeltlektion, og herefter arbejde med forståelsen i anden del af dobbeltlektionen. På den måde har eleverne en klar fornemmelse for hvilke algebraiske udregninger der skal forklares, og tænker måske ”*nej hvor smart hvorfor fik vi ikke det at vide fra starten*” i stedet for ”*hvad skal vi bruge det her til?*” Forklaringen af brøkregnereglerne kan evt. overlades til de elever der mener sig sikre i færdighederne, mens de svage elever regner på flere aritmetiske og algebraiske opgaver. Argumentet for at svigte de svage elever med hensyn til optræning af denne forståelse er, at det er vigtigt at eleverne selv er motiverede for at opnå denne forståelse, og hvis ikke eleverne fra grundskolen har opnået forståelse for aritmetisk brøkregning, vil en enkelt ekstra lektion i gymnasieskolen ikke være nok til at rette op på dette. Opgaverne skal ikke være vanskelige at forstå, men en større del af opgaverne skal konstrueres, så eleverne ikke uden at læse opgaverne kan regne ud hvad de går ud på. Dette skal gå igen i de følgende temaer, så eleverne på den måde tvinges til at lære at læse opgaven før den besvares. Da hensigten med dette ikke er at snyde eleverne, men at lære dem at læse en opgave, er det vigtigt at underviseren gør eleverne opmærksomme på disse indlagte fælder.

Herefter kan *Bægre & bønner* i en dobbeltlektion, bruges til at give eleverne en fornemmelse for lignigsløsning. Frem for at træne elevernes problemløsningsfærdigheder, bruges temaet udelukkende til at forklare hvordan en lineær ligning løses. Eleverne bliver præsenteret for den formelle løsningsstrategi samt eksempler på løsninger. Dermed overholdes den didaktiske kontrakt i første omgang. Eleverne bliver herefter bedt om at lave en forklaring på hvorfor denne metode virker, og bliver guidet til at stille sig selv og hinanden udfordringer af forskellig sværhedsgrad, hvor de bl.a. skal se på ligninger der ikke kan løses, ligninger der altid er sande, og ligninger med negative eller rationelle løsninger. Øvelsen følges op med algebraisk ligningsløsning af lineære problemer.

De sidste to dobbeltlektioner bruges på temaet *Ligevægt*, hvor den første fokuserer på lighedsbegrebet, manipulation af ligheder og ligningsløsning, mens den næste nøje guider eleverne gennem løsning af simple ligningssystemer ud fra fysisk manipulation af ligningssystemer.

I dette kapitel har jeg i et redesign fokuseret mindre på problemløsning og forståelse end i det oprindelige undervisningsforløb, og mere på færdigheder. Formålet hermed er at give eleverne større tryghed og overblik. Temaet *Potens & rod* udgår og arbejdet hermed udsættes til eleverne har tid til at gå i dybden med emnet i forbindelse med potensfunktioner eller den eksponentielle udvikling.

12 Konklusion

Der har blandt eleverne været blandede reaktioner på forsøget på at visualisere algebraen. Enkelte elever der ikke mente de have problemer med algebra, så ikke nogen grund til at forklare algebraen ud fra den virkelige verden. Jeg tolker denne afstandstagen som om disse elever har fundet en metode der virker, og er bange for at nye vinkler kan forstyrre denne metode. Hos andre elever har visualiseringen været det der skulle til for at de kunne forholde sig til den algebraiske tankegang.

12.1 Eleverne skal trænes i færdigheder og forståelse

Jeg har i et ret kompakt undervisningsforløb fokuseret på at undervise eleverne i forståelse af algebraiske koncepter. Selv om mine elever ikke har opnået revolutionerende resultater, er det min overbevisning at denne forståelse er vigtig, men at arbejdet hermed ikke må være en hindring for at elevernes færdigheder optrænes. Flere af mine elever har udtrykt at de havde opnået forståelse for et matematisk koncept, men blot havde svært ved at forklare det. Forståelsen kan dog ikke påvises før eleverne kan forklare konceptet, og dermed må jeg konkludere at forståelsen ikke er opnået. Jeg er gennem projektet blevet overbevist om, at optræning af færdigheder ikke giver mening uden også at træne forståelsen af konceptet. Tilsvarende giver det ikke mening at træne forståelsen hvis ikke færdighedstræningen følger med. Derfor vil jeg formulere denne grundregel:

> *Færdigheder og forståelse er afhængige af hinanden, de styrker hinanden og der skal være en naturlig balance mellem dem.*

12.2 Eleverne skal lære at læse en opgave

I indledningen spurgte jeg om det giver mening, at undervise i eksempelvis infinitesimalregning, hvis ikke eleverne behersker den basale algebra. Jeg har gennem arbejdet med eleverne erfaret, at flere elever har svært ved at læse og forstå en opgave. Det er derfor nærliggende, at stille spørgsmålet:

> *Giver det overhovedet mening, at undervise eleverne i at løse en opgave algebraisk, hvis de ikke kan læse og forstå en opgave?*

Begge spørgsmål kræver vægtige argumenter hvis de skal besvares med et ja. Der er dog ingen grund til ikke at undervise eleverne i at forstå en opgave før de forsøger at løse den. Polyas første punkt til problemløsning *forstå problemet*, kræver derfor målrettet undervisning for at blive implementeret hos eleverne.

12.3 Vægte kan lære eleverne algebra

Når algebra er nyt for eleverne, har de ofte svært ved at tænke generelt frem for konkret. Dette kan hænge sammen med nødvendigheden i at visualisere matematikken, da enhver visualisering er konkret. Typisk forklares et generelt tilfælde ud fra et konkret tilfælde, hvor der efterfølgende argumenteres for at de konkrete værdier er vilkårligt valgte. Derfor skal det generelle konkretiseres, for derefter at generaliseres igen. Ved ligningsløsning kan det med fordel gøres ved hjælp af vippevægte der viser relationer mellem forskellige størrelser. Vippevægtene har vist sig at være velegnede til at visualisere og forklare flere algebraiske principper i et sprog eleverne forstår. Eleverne kan her blive trygge ved notationer som $3A = 5B$. Det kan illustreres hvordan ligninger lægges sammen eller trækkes fra hinanden.

Selv om det ikke lykkedes mig at påvise at eleverne herigennem kan opnå forståelse for ligningsløsning, gav en stor del af eleverne udtryk for at de forstod sammenhængen mellem ligevægtene og ligningsløsning. Størstedelen af eleverne forklarer efter forløbet algebraiske omskrivninger ved hjælp af den formelle metode, hvor samme handling foretages på begge sider af lighedstegnet. Et mere detaljeret undervisningsmateriale, kan sammen med fokus på færre emner, derfor være vejen til forståelse for ligningsløsning.

Mine øvrige temaer var generelt så forvirrende for eleverne, at jeg har stillet spørgsmål ved, hvorvidt det med få dobbeltlektioner til rådighed er hensigtsmæssigt, at lære de algebraiske færdigheder gennem problemløsning og forståelse, eller om udbyttet vil blive større ved efter en kort forklaring, at lade eleverne træne færdigheder efter algoritmer, og herefter fokusere på forståelsen når eleverne er blevet fortrolige med reglerne.

12.4 Eleverne vil have uforpligtende matematik

Eleverne er generelt glade for brud i den vanlige rutine, i form af overraskende indlæg. Disse indlæg kan friske eleverne op. Selv om jeg ikke kan konstatere en forbedring hos eleverne, er det min vurdering at skæve indlæg, der ikke går ud over det faglige indhold, kan gøre matematikundervisningen til et sjovt og spændende fag. Det kan derfor være med til at skabe en glæde hos eleverne, der giver dem energi til den næste faglige udfordring.

Bilag 1 - Hvordan det løses

(Polya, 1945, s. xvi-xvii, egen oversættelse)

1) **Forstå problemet** - Du bliver nødt til at *forstå* problemet.

Hvad er det ukendte? Hvilke størrelser kender vi? Hvilke betingelser er givet? Er det muligt at opfylde betingelserne? Er betingelserne nok til at bestemme det ukendte? Er de utilstrækkelige? Eller overflødige? Eller modstridende?

Lav en tegning. Indfør passende notation. Opdel de forskellige dele af betingelserne. Kan du skrive dem ned?

2) **Lav en plan** – Find sammenhængen mellem det ukendte og de størrelser du kender. Hvis du ikke umiddelbart kan finde en sammenhæng, kan du blive nødt til at overveje om der er nogle mindre problemer der tilsammen løser det store. Endeligt skal du lave en *plan* for løsning af problemet.

Har du set det før? Eller har du set samme problem i en lidt anden udgave?

Kender du et lignende problem? Kender du en sætning der kan være brugbar?

Se på det ukendte! Prøv at finde et problem du kender, som har samme eller lignende ukendte.

Her er et tidligere løst problem der ligner dit. Kan du bruge det? Kan du bruge resultatet fra det? Kan du bruge samme metode? Skal du indføre ekstra elementer for at du kan bruge det?

Kan du beskrive problemet? Kan du beskrive/opskrive problemet på en anden måde? Gå tilbage til definitionerne.

Hvis du ikke kan løse problemet, så prøv først at løse nogle relaterede problemer. Kan du forestille dig et relateret problem der er lettere at løse? Et mere generelt problem? Et mere specifikt problem? Et tilsvarende problem? Kan du løse en del af problemet? Se bort fra nogle af betingelserne; hvad kan du så sige om det ukendte? Hvordan kan det variere? Kan du udlede noget brugbart ud fra de kendte størrelser? Er der andre størrelser der er hensigtsmæssige at kende for at bestemme det ukendte? Kan du ændre det ukendte, eller de kendte størrelser, eller begge dele så problemet bliver lettere at løse? Har du brugt alle de kendte størrelser? Har du brugt alle betingelserne? Har du taget alle de vigtige aspekter i problemet til efterretning?

3) **Udfør planen** – Det er nu tid til at udføre planen.

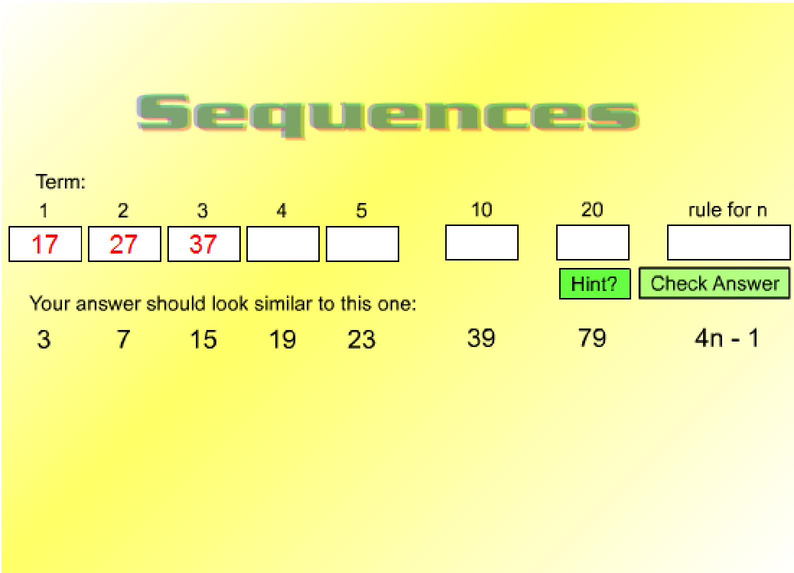
Udfør din plan for løsning af problemet og *tjek hvert skridt*. Kan du se klart at hvert skridt er korrekt? Kan du bevise at det er korrekt?

4) **Tilbageblik** – Vurder den løsning du har fundet.

Kan du tjekke resultatet? Kan du tjekke argumenterne? Kan du udlede resultatet på andre måder? Kan du overskue løsningen som en helhed? Kan du bruge resultatet eller metoden til at løse andre problemer?

Bilag 2 – Programmer på internettet

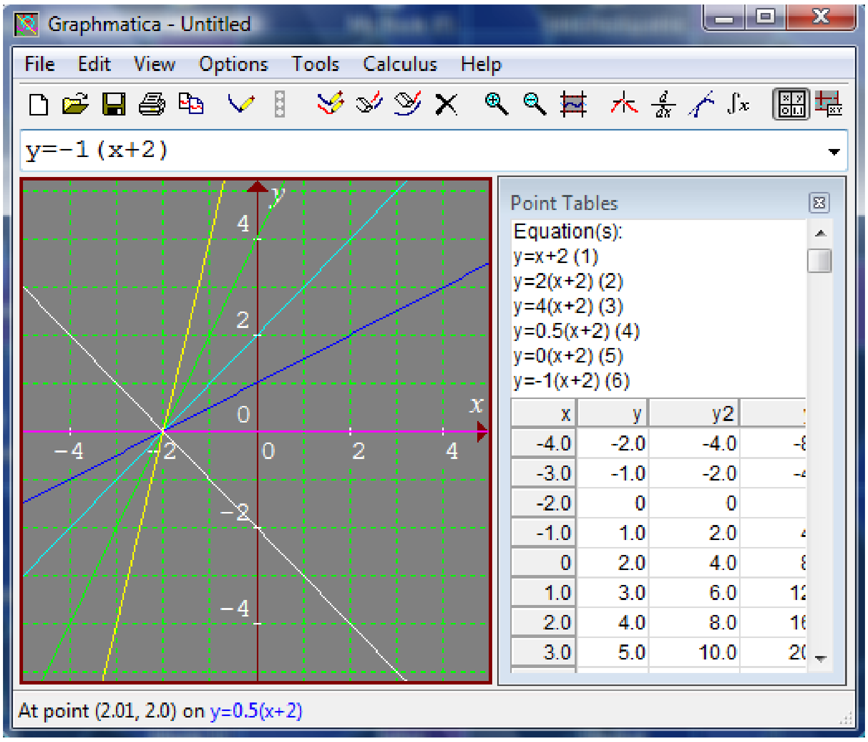
Internetadresser samt billedeksempler på udvalgte programmer.



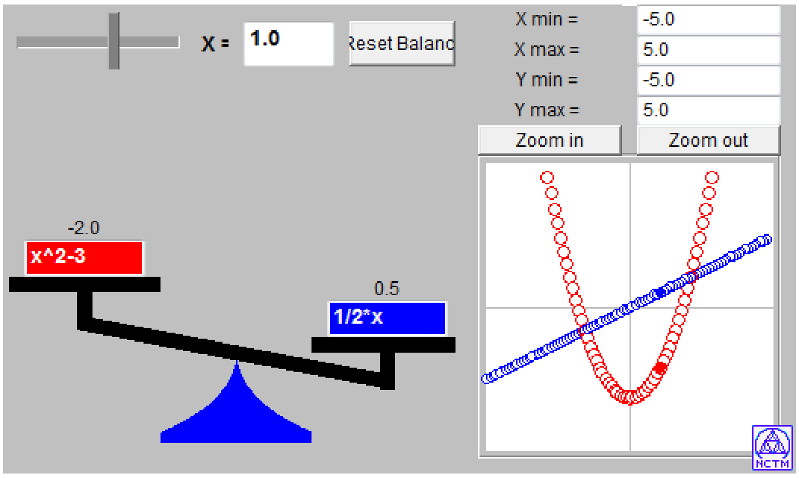
Sequences, lokaliseret den 30. november 2009 på

http://interactivestuff.org/sums4fun/sequences.html

Den sorte følge nederst i Sequences kommer kun frem når der trykkes på [Hint?]-knappen.

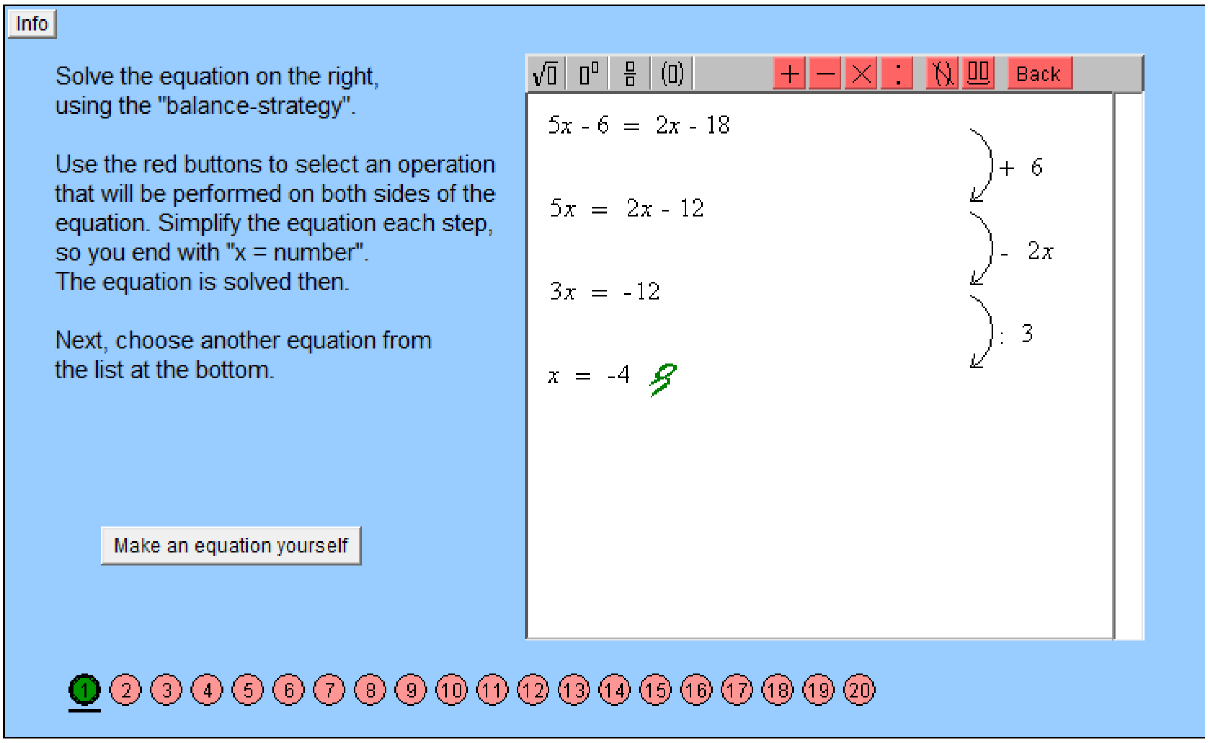


Grafprogrammet graphmatica 2.0, hvor den lineære udvikling med funktionsudtrykket x+2 er multipliceret med en konstant faktor. Det kan f.eks. danne grundlag for en diskussion omkring faktorisering og nulreglen. Graphmatica er lokaliseret den 30. november 2009 på http://graphmatica.com og kan prøves gratis i en måned.



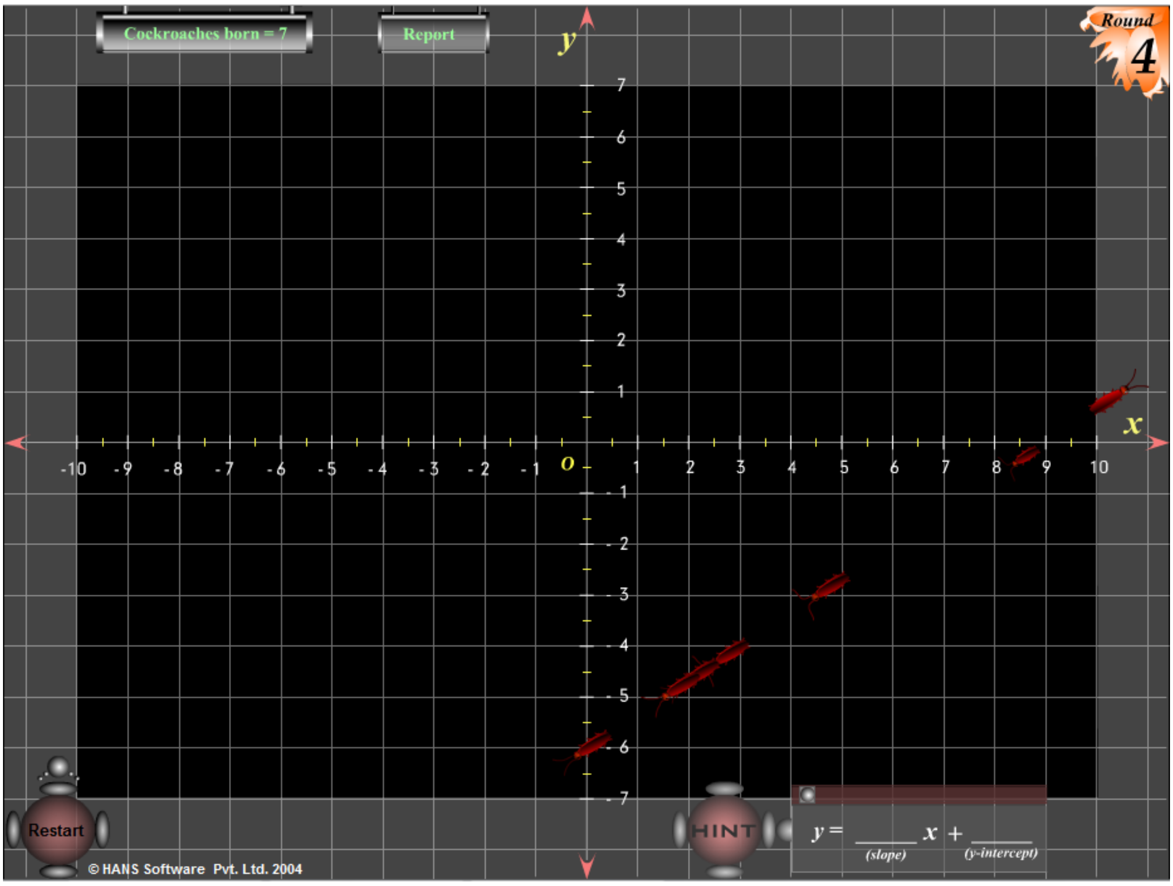
Expression balance, Illuminations, lokaliseret den 30. november 2009 på http://mathsnet.net/algebra/expressionb.html

På balanceknappen i øverste venstre hjørne kan x-værdien justeres. Samtidig skrives funktionsværdien over det røde og blå lod, mens en lille kugle markerer den aktuelle position i koordinatsystemet. Funktionerne skrives i de farvede lodder. Programmet tager også logaritmer, eksponenter og reciprokke funktioner.



Peter Boons algebraspil, lokaliseret den 30. november 2009 på http://mathsnet.net/algebra/balance.html

Programmet kan ikke erstatte træning med papir og blyant, men kan opøve de rette metoder, som forhåbentligt kan føres videre, når eleven skal regne uden brug af tekniske hjælpemidler.



Karappan poochi: Algebra vs. the cockroaches fra HANS software, lokaliseret den 30. november 2009 på http://hotmath.com/games.html, direkte adresse: http://hotmath.com/hotmath_help/games/kp/kp_hotmath_sound.swf

Der er gjort meget ud af at spillet ikke skal ligne et almindeligt regneark. F.eks. kan spilleren vælge forskellige våben, og der vises en animation af en mand og en kakerlak i en boksering, når opgaven er slut for at illustrere hvem der vandt.

En stor database af matematiske programmer og spil findes på http://gamequarium.org under "Gamequarium Math" hvor programmer og spil er delt op i emner efter hvilke egenskaber der skal optrænes.

Bilag 3 – Elevark

Bilaget indeholder:

- *Bægre & Bønner – arbejdsark 106*
- *Bægre & Bønner – opgaveark 107*

- *Ligevægt – arbejdsark 108*
- *Ligevægt – opgaveark 109*

- *Algebra – indledning 110*
- *Arealer – arbejdsark 1 111*
- *Arealer – arbejdsark 2 112*
- *Arealer – opgaveark 113*

- *Brøker – regneregler 114*
- *Brøker – forklaring 115*
- *Brøker – arbejdsark 116*

- *Potens & rod – arbejdsark 1 117*
- *Potens & rod – arbejdsark 2 118*
- *Potens & rod – opgaveark 119*

- *Algebra – evaluering 120*

Bægre & bønner - arbejdsark

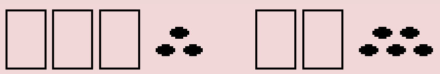
Din gruppe har fået udleveret nogle bægre og nogle bønner.

Bægre & bønner er et spil med meget simple regler:

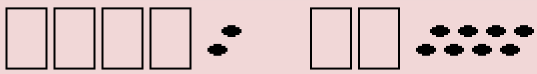
1. *Der skal altid være lige mange bønner i hvert bæger.*
2. *Der skal være lige mange bønner på hver side af bordet. Både bønner i bægrene og uden for bægrene tæller med.*

Udfordringen er i hvert tilfælde, at finde ud af hvor mange bønner der er i hvert bæger.

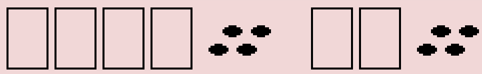
Udfordring 1:
3 bægre og 3 bønner skal svare til 2 bægre og 5 bønner. Hvor mange bønner er der i hvert bæger?



Udfordring 2:
Hvor mange bønner skal der nu være i hvert bæger?



Udfordring 3:
Hvor mange bønner skal der nu være i bægrene?



Nu er det blevet tid til at I selv skal finde på udfordringer til hinanden. Prøv også at løse udfordringerne på flere forskellige måder.

Løsnings strategi:
Findes der en løsningsstrategi der altid virker?

Store antal:
Kan I finde og løse en udfordring, hvor I skal bruge flere bønner eller bægre end I har fået udleveret?

Umulige udfordringer:
Findes der udfordringer der ikke kan løses?

Bægre & bønner - opgaveark

Der er lige mange bønner i hvert bæger.

Opgave 1
34 bægre og 14 bønner svarer til 26 bægre og 46 bønner. Hvor mange bønner er der i hvert bæger?

Opgave 2
I 15 bægre er der tilsammen 18 bønner mere, end i 9 bægre. Hvordan kan vi opstille udfordringen med bægre og bønner? Hvor mange bønner er der i hvert bæger?

Hvis x angiver antallet af bønner i et bæger, svarer 3x+2 til 3 bægre og 2 bønner.

Opgave 3
Løs ligningen (dvs. find værdien af den ubekendte når):
$3x+2 = x+8$

Opgave 4
Løs ligningen:
$2x+3 = 4x+2$

Opgave 5
Løs ligningen:
$2x+2 = 4x+4$

Opgave 6
Her er to tilbud på abonnementer til mobiltelefoni:
Tilbud 1: Abonnement: 10 kr. Samtale: 0,85 kr. per minut.
Tilbud 2: Abonnement: 60kr. samtale 0,45 kr. per minut.
Hvor mange minutter skal man tale, før tilbud 2 bliver billigst?

Ekstra opgave
Et værtshus skal investere i en større mængde terninger. Ejeren finder ud af at en terning koster 2,95 kr. per styk i supermarkedet rundt om hjørnet. Alternativt kan terningerne købes til 1,15 kr. per styk på nettet, hvor der dog skal betales porto og ekspedition på 70 kr.
Hvor mange terninger skal værtshusejeren købe for at det kan svare sig at handle på nettet?

Ekstra opgave
Løs ligningen:
$2x-7 = 4+5x$

Ekstra opgave
Prøv om du kan løse nogle af opgaverne grafisk.

Ligevægt - arbejdsark

Din gruppe har fået udleveret en vippevægt og 2 forskellige slags elementer I kan lægge på vægten.

Find ligevægte:
Find flest mulige kombinationer hvor der ikke ligger præcis de samme elementer på hver skål, men hvor vægten alligevel er i ligevægt.

Når I mener at have fundet alle de mulige kombinationer for ligevægt, skal I gå sammen med en anden gruppe der har fået udleveret et element der er magen til et af jeres, og herudover et element der er forskellig fra jeres.

I egen gruppe:
Prøv om I uden at bruge vægten kan regne ud hvordan man kan lave forskellige ligevægte hvor alle tre elementer indgår.

I egen gruppe:
Jeres to grupper har hver et element der er nyt for den anden gruppe. Prøv uden brug af vægten at regne ud hvordan disse to elementer kan danne ligevægt.

I fælles gruppe:
Diskuter jeres resultater med den anden gruppe, og afprøv resultaterne på vægten.

I skal nu bruge et lod, hvis masse I kender. I kan hente et hos jeres underviser.

Bestem massen:
Bestem ved hjælp af vægten og loddet, massen af hvert element.

Ligevægt - opgaveark

4 skruer vejer det samme som 5 søm.

Opgave 1
Vejer skruerne eller sømmene mest?

Opgave 2
Vi ved også at 1 skrue vejer det samme som 1 søm plus et lod på 1g. Hvad vejer skruerne og sømmene?

Opgave 3
Bestem værdien af A og B når 3A=7 og A=2B+2

Ekstra opgave
Løs ligningssystemet:
2x+3y=4 og 2x+5=y

10 møtrikker vejer det samme som 3 bolte.

5 møtrikker vejer det samme som 6 spændeskiver.

Opgave 4
Hvor mange spændeskiver går der på vægten af en bolt?

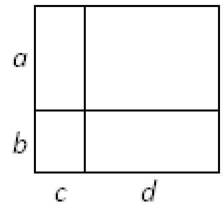
Opgave 5
Hvor mange B går der på 1 A når A=2C og B=3C?

Ekstra opgave
Bestem størrelsen af x udtrykt ved y når x-2z=4 og x+y=z

Opgave 6
15 venner giver samme beløb til en gave til Benjamin. Benjamin får 2 biografbilletter, plus 55 kroner ekstra han kan købe popcorn for. Hvis der havde været 2 venner mere med i gaven, havde de lige nøjagtigt haft råd til 3 biografbilletter. Hvor meget skal de hver give til gaven? Hvad koster en biografbillet?

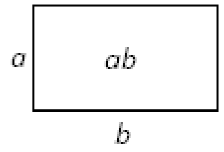
Ekstra opgave
I 46 Cola'er (25cl Coca Cola) er der lige så mange kalorier som der er i 21 Marsbar'er (51g). Bestem indholdet af kcal i en Cola og en Marsbar når der er 45kcal mere i 7 Cola'er end der er i 3 Marsbar'er.

Algebra – indledning



Bogstavregning kalder vi med et fint ord for algebra. Selv om det måske lyder lidt mystisk at man kan regne med bogstaver, er der ingen hokus pokus i algebra.

Alle regneregler bygger på det du ved i forvejen. Hvis du ved at arealet af et rektangel hvor den ene side har længden a og den anden side har længden b, svarer til a gange b, så ved du alt hvad du har brug for lige nu.



Når du først har forstået at regne med bogstaver, vil der åbne sig mange muligheder inden for matematikken.

Algebra er noget af det vigtigste vi har i matematikken. Du får brug for algebra til næsten alt den matematik du skal lære i gymnasiet.

Det er vigtigt, at du forstår hvad der sker på de næste arbejdsark.

Gå ikke videre før du har forstået det afsnit du er i gang med, og spørg hvis du er i tvivl om noget.

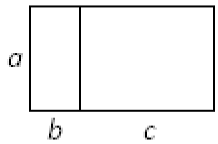
I algebra undlader man ofte gangetegnet. F.eks. skrives ofte
ab *i stedet for* $a \cdot b$,

$a(b+c)$ *i stedet for* $a \cdot (b+c)$ *og*

$4a$ *i stedet for* $4 \cdot a$,

men vi kan ikke skrive 24 i stedet for $2 \cdot 4$, *da det har en anden betydning.*

Arealer – arbejdsark 1



Figur 1

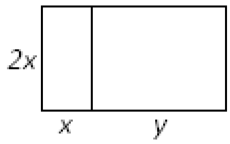
Se på figur 1. Arealet af det store rektangel er det samme som det samlede areal af de to mindre rektangler. Det skrives algebraisk som

$a(b+c) = ab + ac$

Vi kan altså se at de to algebraiske udtryk $a(b+c)$ og $ab+ac$ er ensbetydende ved at lave en geometrisk illustration.

Bemærk, at vi kan opfatte $b+c$ som én længde ved at sætte en parentes omkring

Opskriv en lighed:
Opskriv en algebraisk lighed ud fra arealet af figur 2.



Figur 2

Geometrisk bevis:
Vis geometrisk at
$4a + ab = a(4+b)$

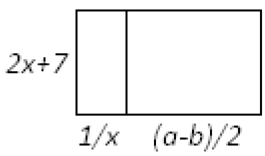
Geometrisk bevis:
Vis geometrisk at
$t(3a+2b) = 3at + 2bt$

Hvis vi skriver $a(b+c)$ om til $ab+ac$, siger vi at vi ganger ind i parentesen.

Hvis vi skriver $ab+ac$ om til $a(b+c)$,

Ophæv parentesen:
Gang 4a ind i parentesen
$4a(3y+k)$

Sæt uden for parentes:
Sæt 2x uden for en parentes i udtrykket $4x + 2xy$

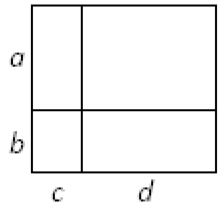


Figur 3

Bemærk, at vi kan gøre det samme for alle mulige udtryk. F.eks. gælder der at

$(2x+7)\left(\frac{1}{x}+\frac{a-b}{2}\right) = (2x+7)\left(\frac{1}{x}\right) + (2x+7)\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Se figur 3.

Arealer – arbejdsark 2



Figur 1

I algebra gælder bl.a. følgende regneregler:

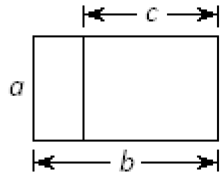
$a(b+c) = ab + ac$

$a(b-c) = ab - ac$

$-a(b+c) = -ab - ac$

Den sidste regel kan forklares ved, at hvis vi mangler arealet $a(b+c)$ sva-

Geometrisk bevis:
Forklar ved hjælp af figur 2 hvorfor $a(b-c) = ab - ac$



Figur 2

Algebraiske regler:
Hvor mange algebraiske regneregler kan du udlede af figur 1?

Ophæv parentesen:
Udregn $(a+b)^2$, og forklar udregningen geometrisk

$(a+b)^2$ betyder $(a+b)(a+b)$

Ophæv parenteserne:
Udregn $(a+b)(a-b)$, og forklar udregningen geometrisk

Reducer udtrykket:
Forklar hvorfor første skridt i reduktionen herunder kan vises med figur 3, og redegør geometrisk for hvert af de øvrige skridt:

$((y+x)+5)(x+(5-y))$

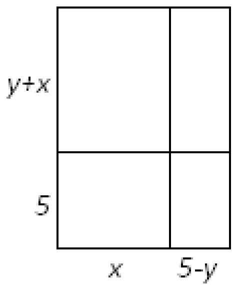
$(y+x)x + (y+x)(5-y) + 5x + 5(5-y)$

$\boldsymbol{xy + x^2} + (y+x)(5-y) + 5x + 5(5-y)$

$xy + x^2 + \boldsymbol{5y - y^2 + 5x - xy} + 5x + 5(5-y)$

$xy + x^2 + 5y - y^2 + 5x - xy + 5x + \boldsymbol{5^2 - 5y}$

Udfordring:
Udregn $(a-b)^2$, og forklar udregningen geometrisk. Hent evt. inspiration i figur 2.



Figur 3

Arealer - opgaveark

Regneartemes hierarki siger at vi skal udregne potensen før produktet.

Udtrykket $2x^2$ betyder altså 2 gange arealet af et kvadrat med sidelængde x, og ikke arealet af et kvadrat med sidelængden 2x.

Tilsvarende betyder $-x^2$ det negative af arealet af kvadratet med sidelængde x, og er derfor ikke det samme som $(-x)(-x) = x^2$.

Opgave 1
Reducer udtrykket
$3a + 6b - 2a + b$

Opgave 2
Sæt x uden for en parentes i udtrykket
$2x^2 + x$

Opgave 3
Gang $\frac{a}{2}$ ind i parentesen:
$\frac{a}{2}(2a + 8 + b)$

Du kan evt. også lave en geometrisk

Opgave 4
Hæv parentesen i udtrykket:
$a(b + c)^2$

Husk at potenser udregnes før produkter

Ekstra opgave
Sæt k uden for en parentes
$4k - kx + k^2$

Opgave 5
Reducer udtrykket
$(2x - y)(x + 2y) + 2(x + y)^2$

Det vi ganger sammen kalder vi faktorer, og faktorernes orden er ligegyldig, dvs. det er lige meget om vi siger ab eller ba.

Der gælder derfor også at

$$abc = acb = b(ca) = (bc)a \qquad \text{og}$$

$$2(a + b)(3a - c) = (2a + 2b)(3a - c)$$

Opgave 6
Hæv parentesen
$\frac{1}{4}(2a - b)^2$

Ekstra opgave
Udregn
$(a + b)^3$

Brøker – regneregler

$$\frac{\text{tæller}}{\text{nævner}}$$

Da bogstaverne bare er nogle tal vi ikke kender lige nu, er brøkregning for bogstaver det samme som du har lært for tal.

To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ kan forlænges så de får fælles nævner:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

En brøk forlænges ved at gange med samme tal eller værdi i tæller og nævner:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \qquad a = \frac{ab}{b}$$

En brøk forkortes ved at dele med samme tal eller værdi i tæller og nævner:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{ab}{b} = a$$

Brøker med fælles nævner kan lægges sammen eller trækkes fra hinanden:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Omvendt kan en brøk med flere led i tælleren deles ud i flere brøker:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

To brøker ganges sammen ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Omvendt er det ofte nyttigt at trække en værdi ud af brøken:

$$\frac{ab}{c} = a\frac{b}{c}$$

Når man deler med en brøk, så ganger man med den omvendte:

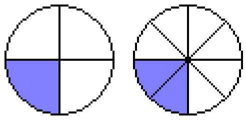
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

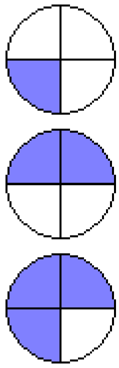
Som i de øvrige kasser, kan det også være nyttigt at omskrive fra

Brøker – *forklaring*

Hvis en eller flere kager deles op i lige mange lige store stykker, svarer dette antal til brøkens nævner, og de kagestykker vi får lov til at tage svarer til tælleren. Selve brøken er dermed den andel kage vi må tage. Bemærk at det ikke giver mening at dele med nul.



Figur 1



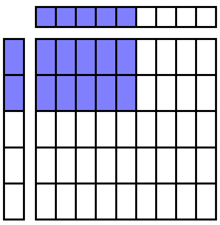
Figur 2

Forlæng og forkort en brøk

Hvis alle kagestykkerne bliver delt op i flere stykker, skal vi tage tilsvarende flere stykker kage for at få den samme andel. Heraf kommer reglen om at forlænge en brøk. Tilsvarende kan en kage være blevet delt i flere dele end nødvendigt, og vi må så forkorte. Se figur 1.

Addition af brøk

Prøv ud fra figur 2 at forklare regnereglerne fra rammen hvor brøker bliver lagt sammen eller trukket fra hinanden.



Figur 3

Produktet af to brøker

Husk på at et produkt, dvs. to faktorer ganget sammen kan illustreres ved et areal.

Figur 3 viser derfor at nævneren (antallet af kagestykker i alt) er produktet af brøkernes nævnere og at tælleren (de stykker vi må tage) er produktet af brøkernes tællere.

At dele med en brøk

En brøk kan som nævnt ses som en mængde kage vi har til rådighed.

Hvis vi f.eks. deler brøken med 2, svarer det til, at antallet af kagestykker bliver fordoblet uden, at vi må tage flere stykker end før.

Hvis vi modsat skal dele med f.eks. $\frac{1}{2}$*,*

kan vi tænke på, at det vi har, svarer til den mængde kage hver elev i klassen må få. Hvis vi kun skal dele med halvdelen af klassen, da kan hver elev få dobbelt så meget kage.

Prøv selv at få en fornemmelse for reglerne ved at lave flere eksempler.

Brøker - arbejdsark

Fra regnereglerne er a,b,c og d blot pladsholdere for tal eller udtryk.

Eksempelvis gælder der at

$$\frac{x}{2}+\frac{x+3}{x}=\frac{x^2}{2x}+\frac{2(x+3)}{2x}=\frac{x^2+2x+6}{2x}$$

Fordelen ved algebra er, at man kan lave generelle regneregler. Se f.eks. på udregningen:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2(2+3)}{2\cdot 3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{6}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}=1+\frac{3}{2}$$

Hvis vi erstatter 2 og 3 med 4 og 5 på venstresiden, vil højresiden efter reduceringen blive $1+\frac{5}{4}$.

Det er selvfølgelig let at tjekke hvad regnestykket giver med bestemte tal, men hvis vi vil se om noget gælder for alle tal, laver vi en algebraisk udregning:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a(a+b)}{ab}=\frac{ab(a+b)}{a\cdot ab}=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}$$

Reducer udtrykket:
Gang brøkerne sammen og forkort resultatet
$\frac{x}{2}\cdot\frac{2x+6}{x}$

Omskriv:
Vis at brøken
$\frac{x^2+2x+6}{2x}$
kan omskrives til
$\frac{1}{2}x+1+3\frac{1}{x}$

Reducer udtrykket:
$\frac{\pi t^2+2t}{2t}$

Tal magi
Tænk på et tal.
Læg 6 til tallet.
Gang resultatet med 2.
Træk 2 fra.
Halver svaret.
Træk dit oprindelige tal fra.
Nu har du en håndfuld tilbage.

Brug algebra til at forstå den magiske opgave.

Brug algebra til at lave dine egne magiske opgaver.

Potens & rod – arbejdsark 1

Definition: *x^a betyder at x skal ganges med sig selv a gange, og læses "x opløftet i a'te potens"*

Eksempler:
$x^3 = x \cdot x \cdot x$ og læses "x i tredje"

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ og læses "fem i fjerde"

$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 +$
og læses "anden potens af summen af a og b" eller "kvadratet af

Det er ikke alle de følgende regneregler der gælder. Undersøg hvilke der gælder når p og q er naturlige tal:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2) $a^p \cdot a^q = a^{p \cdot q}$
3) $a^p + b^p = (a+b)^p$
4) $a^p \cdot b^p = (a+b)^p$
5) $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
6) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
7) $\frac{a^p}{a} = a^{p-q}$

Eksempelvis gælder regneregel 7, da

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a(p \text{ gange})}{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a(q \text{ gange})}$$

Hver gang a er ganget på både tælleren og nævneren, kan a forkortes væk. Hvis p er større end q, kan man derfor q gange forkorte brøken med a, så der til sidst bare står 1 i nævneren og $(p-q)$ a'er ganget sammen i tælleren. Derfor er

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Eksempel:

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = \frac{x \cdot x \cdot x}{1} = x^3$$

Eksempelvis gælder regel 8 ikke, da vi kan finde et modeksempel hvor reglen ikke gælder:

$$3^2 - 3^1 = 9 - 3 = 6$$

$$3^{\frac{2}{1}} = 3^2 = 9$$

Da 6 er forskellig fra 9, har vi fundet et eksempel hvor reglen ikke gælder.

Potens & rod – arbejdsark 2

Hvad nu hvis eksponenten er nul eller negativ? Eller hvad hvis den slet ikke er et heltal? Ligesom vi definerede potenser på arbejdsark 1 og undersøgte hvilke regneregler der gjaldt, kan vi definere potenser med rationelle eksponenter til at følge samme regneregler som dem med naturlige eksponenter.

Ud fra de gyldige regneregler fra arbejdsark 1 kan vi derfor bestemme:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

$$a^{-1} = a^{0-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$$

og

$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}$$

Regneregel 7 giver derfor også mening når q er større end p:

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} =$$

Vi får også at

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)} = a^1 = a$$

$a^{\frac{1}{2}}$ *er altså det tal, der ganget med sig selv giver a. Dette tal kalder vi også for den anden rod af a, eller oftest kvadratroden af a. Dvs.*

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Tilsvarende gælder derfor den p'te rod af a, at

$$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$$

Prøv om du ud fra regnereglerne for potenser kan finde nogle regneregler for rødder?

Potens & rod - opgaveark

Opgave 1
Isoler a i ligningen
$\sqrt{a} = b$

Opgave 2
Løs ligningen med hensyn til x (dvs. isoler x):
$\sqrt[3]{x+1} = 2$

Opgave 3
Bestem hvilke regneregler der er brugt i hvert skridt af udregningen herunder:

Isoler x *i ligningen, hvor* $a < 1 \; og \; x > 0$

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2} + a = 1$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = 1 - a$$

$$x^{\frac{1}{2}-2} = 1 - a$$

$$x^{-\frac{3}{2}} = 1 - a$$

$$\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = (1-a)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x^{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{(1-a)^{\frac{2}{3}}}$$

$$x^1 = \frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{3}\cdot 2}}$$

Ligninger bliver ofte lettere at løse hvis man lægger hånden over en del af ligningen, og finder ud af hvad det man har lagt hånden over skal give.

Eksempel: Løs ligningen:

$$(x+5)^3 - 7 = 20$$

$$[Noget] - 7 = 20$$

$$[Noget] = 27$$

$$(x+5)^3 = 27$$

$$[Noget]^3 = 27$$

$$[Noget] = 3$$

Opgave 4
Prøv at bruge metoden i rammen ovenover til at løse ligningen
$$\frac{32}{(x-3)^2} + 2 = 4$$

Bemærk at ligningen har to løsninger.

Opgave 5
Hvis noget optræder flere steder i en ligning må man lægge en hånd over begge dele.
Løs ligningen
$4(x-2)^5 + 7 = 2(x-2)^5 + 9$

Ved at lægge en hånd over $(x-2)^5$, *dvs.*

$4[Noget] + 7 = 2[Noget] + 9$

Algebra - evaluering

Nu er det blevet tid til at samle op på det du har lært.

Kan du omskrive en situation til et algebraisk udtryk eller en ligning?

Kan du ophæve parenteser og reducere udtryk?

Kan du isolere og bestemme en ukendt størrelse?

Opgave 1
Søren bor 12,5 km tættere på skolen end Inge. Alligevel har de nøjagtig den samme transporttid til skolen, når Søren på sin knallert kører 30 km/t., og Inge i bil kører 80 km/t. Hvor lang er deres transporttid? Hvor langt har de til skolen?

Hvis vi skal isolere en variabel eller ukendt størrelse, skal vi bruge alt den algebra vi har lært. Her er et eksempel på hvordan p isoleres ved hjælp af en række omskrivninger:

$$s = \frac{p+2}{p}$$

$$sp = p + 2$$

$$sp - p = 2$$

$$p(s-1) = 2$$

$$2$$

Opgave 2
Reducer udtrykket:
$(x+a)^2 - (x-a)^2$

Opgave 3
Isoler m i ligningen:
$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

Opgave 4
Løs ligningssystemet:
$A - B = 1$

$4(A + 2B) = 0$

Ekstra opgave
Anders er 4 år ældre end Peter. Om 2 år er de tilsammen 50 år. Hvor gamle er de nu?

Bilag 4 - De tre regnearter

(Af Uffe Mose, 24.03.09, frit fortolket over De tre bukke Bruse)

Der var engang tre regnearter; Plus, Gange og Potens. Plus var bare en lille regneart der ofte legede med de små børn i skolen. Gange var den mellemste regneart og legede med de mellemste børn. Potens som var den største regneart, hang kun ud med de store klasser.

Plus, Gange og Potens skulle ud i verden og gøre sig nyttige og brugbare. På deres færd skulle de krydse en flod, og under flodens eneste bro boede den fæleste trold der regnede så dårligt, at den kunne finde på at ignorere alle parenteser eller bytte rundt på regnearternes indbyrdes orden uden at fortrække en eneste mine.

Først trippede den lille regneart Plus over broen. Den kunne se troldens forfærdelige notater med alle mulige rædselsfulde regnefejl, stikke op at troldens store baglomme. Trolden stak sit grimme hoved frem og råbte ”Hvem er det der tripper på min bro?”. ”Det er bare mig Plus, den lille regneart.” svarede Plus med sin skingre stemme. ”Nu kommer jeg og bruger dig!” råbte den fæle trold, mens den spyttede alle mulige grimme decimaltal ud af munden. ”Nej du må ikke bruge mig endnu” sagde den lille Plus, ”jeg er ikke alene, og om lidt kommer den mellemste regneart Gange, som er meget bedre at bruge end mig”. ”Ok” sagde trolden der ikke kunne regne, ”så venter jeg”.

Nu gik den mellemste regneart Gange over broen, og trolden kom straks farende med sit vilde hår strittende i alle retninger som uegentlige vektorer. ”Hvem er det der tramper på min bro?” skreg trolden. ”Det er mig den mellemste regneart Gange” svarede Gange med en lidt usikker stemme. ”Nu kommer jeg og bruger dig!” råbte trolden så hele broen blev sat i svingninger. ”Nej nej, du må ikke bruge mig endnu” sagde den mellemstore Gange, ”Plus og jeg er ikke alene, og om lidt kommer den største regneart Potens, som er meget bedre at bruge end mig”. ”Ok” sagde trolden der stadig ikke kunne regne, ”så venter jeg”.

Endelig kom den største regneart Potens til broen, og selv om den havde set trolden sprutte og spytte helt rød i hovedet af ophidselse, gik Potens selvsikkert over broen. ”Hvem er det der tramper på min bro?” råbte trolden. ”Det er mig den største regneart Potens!” råbte Potens tilbage med høj røst. ”Nu kommer jeg og bruger dig!” råbte trolden og sprang som trold af en æske, der var et mislykket optimeringsprojekt, op på broen så den knagede og bragede under deres fælles vægt. ”Ja, kom du bare an!” sagde Potens, ”for jeg har været som både Plus og Gange, og mig skal du være velkommen til at bruge nu, bare du husker at tage højde for parenteserne først”. Så pakkede Potens trolden ind i en parentes, og smed hele parentesen i vandet med et ordentligt plask, så alle de afskyelige noter med regnefejl blev skyllet væk.

De tre regnearter fortsatte nu lystigt videre på deres færd, hvor Plus mødte den søde Minus, Gange blev helt forelsket i Divider, og Potens fandt sin Rod.

På hjemvejen gik de parvist over broen hvor trolden endelig havde fundet ud af parentesen. Da trolden ikke skulle nyde mere, var den helt medgørlig på tilbagevejen. Den fik derfor først lov til at udregne Potens og Rod, herefter måtte den udregne Gange og Divider, og til sidst den lille Plus og Minus.

Og nu kunne de alle regne lykkeligt til deres dages ende.

Bilag 5 – Kvadratsætningerne

For tilgængelighedens skyld har jeg ligeledes lagt en indspillet version af sangen med illustrationer på http://www.youtube.com/watch?v=XCRi3-JTgII

På youtube.com er sangen ved specialets afslutning det eneste søgeresultat på "kvadratsætningerne".

Bilag 6 – Argumentationsøvelse

Læs først nedenstående tekst grundigt! Så du ved hvad opgaven går ud på.

Denne opgave er en øvelse i, at forklare og argumentere for beviser og udregninger. Opgaven skal løses og besvares skriftligt, og du vil få en karakter for opgaven der udelukkende er baseret på dine verbale (dvs. sproglige) forklaringer af udregningerne. Det betyder at de udregninger du skal lave i sidste opgave naturligvis skal laves rigtige for, at du kan argumentere korrekt, men at udregninger uden forklaringer ikke tæller med i besvarelsen. Du bliver heller ikke belønnet for at skrive formål m.m. så undlad at aflevere andet end forklaringer og udregninger. **Det er derfor vigtigt, at du med egne ord beskriver hvert eneste skridt i opgaven**.

Opgaven er tredelt. **Første del** viser hvordan forklaringerne kan gives. I **anden del** skal du argumentere for samtlige omskrivninger og i **tredje del** skal du både lave og forklare udregningerne. **Du skal ikke aflevere første del.** Herudover er der en frivillig ekstraopgave som ikke vil tælle med i vurderingen.

Hvis du er i tvivl om hvad du skal, så læs ovenstående igennem igen indtil du har en klar fornemmelse for hvad opgaven går ud på.

1. del: Eksempel

Første del er et eksempel på, hvordan man kan føre argumenter for sine udregninger. Eksemplet kan virke lidt overdrevet, men husk at opgaven netop går ud på at forklare alle skridt ned i mindste detalje.

Løs ligningssystemet

$$x^2 - 4a^2 = 5x + 10a \quad \wedge \quad 6a^2 = 3x(a-2)$$

Forklaring: Vi starter med at forsimple den første ligning

$$x^2 - 4a^2 = 5x + 10a$$

Vi bemærker at venstre siden ligner noget der passer ind i den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Lad os se på hvorfor kvadratsætningen gælder: Når vi ganger to parenteser med flerleddede størrelser, skal vi gange alle leddene med hinanden. På den måde får vi leddene $a^2 - ab + ba - b^2$, og da faktorernes orden er ligegyldig dvs. ab har samme værdi som ba, ser vi at de to midterste led går ud med hinanden. Da $4a^2$ ifølge potensregnereglerne kan omskrives til $(2a)^2$ omskriver vi derfor ved hjælp af den tredje kvadratsætning, ligningen til

$$(x+2a)(x-2a) = 5x + 10a$$

Vi kan se at 5 er en fælles faktor for hver af de to led på højresiden af lighedstegnet. Vi faktoriserer derfor højresiden ved at sætte 5 uden for en parentes

$$(x+2a)(x-2a) = 5(x+2a)$$

Da $(x+2a)$ optræder på begge sider af lighedstegnet, deler vi ligningen med denne størrelse. Dvs. vi deler med $(x+2a)$ på begge sider. Da vi ikke må dele med nul, bliver vi nødt til at undersøge om $(x+2a)$ kan være lig med nul. Lige nu antager vi, at $(x+2a)$ ikke er nul, og ser nærmere på tilfældet hvor $x + 2a = 0$ senere. Vi kommer herefter frem til, at

$x - 2a = 5$

Vi kan altså se, at udtrykket $x^2 - 4a^2 = 5x + 10a$ kan omskrives til $x - 2a = 5$.

For at løse ligningssystemet isolerer vi nu x i den forsimplede ligning, og erstatter x i den anden ligning med den værdi vi finder for x. Vi kalder denne metode for substitutionsmetoden, da vi substituerer (erstatter) x med en tilsvarende værdi.

x isoleres ved at lægge $2a$ til på begge sider af lighedstegnet. Herved går $-2a$ og $2a$ ud med hinanden på venstre siden og vi får

$x = 5 + 2a$

Indsættes denne værdi for x i ligningen $6a^2 = 3x(a - 2)$ får vi

$6a^2 = 3(5 + 2a)(a - 2)$

Højresiden består nu af tre faktorer som vi kan multiplicere i vilkårlig rækkefølge, da faktorernes orden som tidligere nævnt er uden betydning. Vi kunne f.eks. vælge at multiplicere de to første faktorer og huske, at når vi ganger en størrelse ind i en parentes, skal vi gange den på alle leddene i parentesen. I dette tilfælde er det dog lettere at dele begge sider af ligheden med 3 hvorved vi får

$2a^2 = (5 + 2a)(a - 2)$

Nu hæver vi de to parenteser ved at gange dem sammen, hvilket som tidligere nævnt gøres ved at gange alle leddene sammen. Gør vi det får vi

$2a^2 = 5a - 10 + 2a^2 - 4a$

Vi ser, at begge sider af ligheden indeholder leddet $2a^2$. Derfor trækker vi denne størrelse fra på begge sider af ligheden og får dermed

$0 = 5a - 10 - 4a$

På højresiden er der to led der indeholder et a. Disse to led samler vi. Denne handling kan man forstå på flere måder, f.eks. kan man sige at har vi 5 a'er og trækker 4 a'er fra, da har vi 1 a tilbage. Vi kan også tænke at begge led indeholder en fælles størrelse, som vi dermed kan sætte uden for en parentes bestående af differencen 5-4. I begge tilfælde kan vi omskrive ligningen til

$$0 = a - 10$$

Hvis vi nu lægger 10 til på begge sider, går -10 ud med 10 på højresiden og vi får

$$a = 10$$

Da vi nu ved at $a = 10$, og da vi tidligere så, at $x = 5 + 2a$ kan vi ved substitution se, at

$$x = 5 + 2 \cdot 10$$

så

$$x = 25$$

En løsning på ligningssystemet er derfor $a = 10$ og $x = 25$. Vi kan tjekke om vi har regnet rigtigt, ved at sætte $a = 10$ og $x = 25$ ind de oprindelige ligninger, og se om lighederne er opfyldte. Prøver vi det, ser vi at vi har fundet en løsning:

$$25^2 - 4 \cdot 10^2 = 5 \cdot 25 + 10 \cdot 10 \quad \wedge \quad 6 \cdot 10^2 = 3 \cdot 25 \cdot (10 - 2)$$

Vi antog i udregningen, at $(x + 2a)$ var forskellig fra nul. Derfor ser vi nu på hvad der ville ske hvis dette ikke er tilfældet. I så fald ved vi, at

$$x + 2a = 0$$

og kan ved at trække $2a$ fra på begge sider af lighedstegnet se, at

$$x = -2a$$

Substitueres denne værdi for x ind i den oprindelige ligning $6a^2 = 3x(a-2)$ fås

$6a^2 = 3(-2a)(a-2)$

Vi deler med 3 på begge sider af lighedstegnet, og ganger herefter $-2a$ ind i parentesen $(a-2)$, og får

$2a^2 = -2a^2 + 4a$

Idet vi husker, at fortegnene ændres, når vi ganger en negativ værdi ind i parentesen. Vi trækker $2a^2$ fra på begge sider og deler herefter med 4, hvorefter vi får

$0 = -a^2 + a$

Ved at sætte a uden for en parentes, kan dette omskrives til

$0 = a(1-a)$

Heraf ses det let, at der er to løsninger nemlig $a = 0$ eller $a = 1$.

Hvis $a = 0$ ser vi ud fra ligningen $6a^2 = 3x(a-2)$ at $x = 0$. Hvis $a = 0$ og $x = 0$ skal være en løsning, skal de også opfylde den første ligning $x^2 - 4a^2 = 5x + 10a$. Sætter vi nul ind i stedet for x og a, ser vi at ligningen er opfyldt, og $a = 0$ og $x = 0$ er en løsning til ligningssy-stemet. Hvis vi gør det samme for $a = 1$ ser vi at $a = 1$ og $x = -2$ også er en løsning til ligningssystemet. Dermed har vi fundet samtlige løsninger til ligningssystemet.

Løsningen til ligningssystemet er derfor

$a = 10$ og $x = 25$ eller

$a = 0$ og $x = 0$ eller

$a = 1$ og $x = -2$

2. del:

Herunder ses løsningen på et ligningssystem uden forklaring. Det er din opgave at skrive så detaljerede forklaringer til udregningen som muligt.

Løs ligningssystemet

$2y - 3x = 7 \quad \wedge \quad 5y + 4x = 2$

$8y - 12x = 28 \quad \wedge \quad 15y + 12x = 6$

$(8y - 12x) + (15y + 12x) = 28 + 6$

$23y = 34$

$y = \frac{34}{23}$

$2\frac{34}{23} - 3x = 7$

$\frac{68}{23} = 7 + 3x$

$\frac{68}{23} - 7 = 3x$

$-\frac{93}{23} = 3x$

$x = -\frac{31}{23}$

3. del:

Herunder ses et ligningssystem. Det er din opgave at løse ligningssystemet og skrive så detaljerede forklaringer til løsningen som muligt. Bedømmelsen vil være baseret på dine forklaringer, mens udregninger uden forklaringer ikke vil tælle med i bedømmelsen.

Løs ligningssystemet

$(x-4)^2 = x^2 - y \quad \wedge \quad 2y - 4x = 4$

Ekstraopgave:

Forklar hvorfor $4(A+B) = 4A + 4B$

Litteraturliste

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. I: Formal mathematics, *For learning of mathematics* (14(3), s. 24-35). Canada: FLM Vancouver.

Balling, D. (2003). Grafregneren i gymnasiets matematikundervisning: Underviserens holdninger og erfaringer (Ph.d.). Danmark: Dansk institut for gymnasiepædagogik, Syddansk universitet. Lokaliseret den 30. november 2009 på
http://www.konsulenter.acu-aarhus.dk/db/Afhandling.htm

Bell, A. et al. (2004). Strategies for problem solving and proof. I: B. Clarke et al. (Red.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s. 129-143). Göteborg: NCM.

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. I: *Education and didactics* (1(3), s. 123-141). Lokaliseret den 30. november 2009 på
https://www.msu.edu/~sfard/Learning_autonomy_11_Nov_07.doc

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (2000). Nämaren tema: Algebra för alla. Göteborg: NCM.

Bloedy-vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables: Parameters and dummy variables in high school algebra. I: R. Sutherland et al. (Red.), *Perspectives on school algebra* (e-book, s. 177-189). Holland: Kluwer.

Blomhøj, M. (1995). Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen. I: *Kognition & pædagogik* (4(3), s. 16-25).

Blomhøj, M. & Jensen, T. (2007). SOS-projektet: Didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. I: R. Schultz, *SOS-projektet – afsluttende rapport: Sammenhæng i matematikundervisningen fra skole til gymnasium – fokus på symbolerne* (s. 8-36). Danmark: CVU Lillebælt.

Carter, J. (2008). Visualization and understanding in mathematics. I: B. Sriraman et al. (Red.), *Proceedings of the 2nd international symposium on mathematics and its connections to the arts and sciences* (MACAS2, s. 223-231). Odense: Syddansk universitet.

Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. I: *The American mathematical monthly* (88(4), s. 286-290). Mathematical association of America.

Dettori, G., Garuti, R. & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. I: R. Sutherland et al. (Red.), *Perspectives on school algebra* (e-book, s. 191-207). Holland: Kluwer.

Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I: F. Lester (Red.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol.1, s. 371-404). USA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I: D. A. Grouws (Red.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 390-419). New York: Macmillian.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. I: A. Gutiérrez & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (s. 11-49). UK: Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building Meaning for symbols and their manipulation. I: F. Lester (Red.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol.2, s. 707-762). USA: NCTM.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. I: T. Carpender, J. Dossey & J. Koehler, *Classics in mathematics education research* (2004, s. 41-47). USA: NCTM. Oprindeligt i: L. Hatfield, *Mathematical problem solving* (s. 7-20). ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. I: A. Cuoco & F. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (2001 Yearbook, s. 146-165). USA: NCTM.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. I: T. Carpender, J. Dossey & J. Koehler, *Classics in mathematics education research* (2004, s. 153-171). USA: NCTM. Oprindeligt i: *American educational research journal 27* (s. 29-63).

Michelsen, C. (2001). Begrebsdannelse ved domæneudvidelse: Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet I et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik (Ph.d.). Danmark: Dansk institut for gymnasiepædagogik, Syddansk universitet.

Michelsen, C. (2004). Et eksempel på en antididaktisk inversion - gymnasiets lærebøger i matematik. I: *Forum for matematikkens didaktik* (1, marts 2004, s. 3-7). Lokaliseret den 30. november 2009 på http://www.matematikdidaktik.dk/nyhedsbreve/nyhed-81.doc

Michelsen, C. (I tryk, 2010). Commentary to Lesh and Sriraman: Mathematics education as a design science. I: Sriraman, B. & English, L. (Red.), *Theories of mathematics education* (s. 151-158). Tyskland: Springer.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. USA: NCTM.

Nielsen, P., & Krægpøth, K. (2007). Symbolbehandlingskompetence og overgangsproblemer. I: R. Schultz, *SOS-projektet – afsluttende rapport: Sammenhæng i matematikundervisningen fra skole til gymnasium – fokus på symbolerne* (s. 46-56). Danmark: CVU Lillebælt.

Nielson, S. (2007). Symbolbehandling: En udfordring i matematikundervisningen i 8. og 9. klasse. I: R. Schultz, *SOS-projektet – afsluttende rapport: Sammenhæng i matematikundervisningen fra skole til gymnasium – fokus på symbolerne* (s. 37-45). Danmark: CVU Lillebælt.

Niss, M. et al. (2002). Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (tema 18(1)). Danmark: Uddannelsesstyrelsen.

Niss, M. (2007). Opgavediskursen i matematikundervisningen. I: *MONA, Matematik- og naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere* (marts 2007-1, s. 7-17). Danmark: Det naturvidenskabelige fakultet, Københavns universitet.

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method (2. udgave, 1957). USA: Princeton university.

Romberg, T. (1994). Classroom instruction that foster mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. I: Schoenfeld, A. (Red.), *Mathematical thinking and problem solving* (s. 53-70). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Saul, M. (2001). Algebra: What are we teaching?. I: A. Cuoco & F. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (2001 Yearbook, s. 35-43). USA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I: D. A. Grouws (Red.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). New York: Macmillian.

Schoenfeld, A. (1994a). What do we know about mathematics curricula?. I: *Journal of mathematical behavior* (13(1), s. 55-80). Lokaliseret den 30. november 2009 på http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_WhatDoWeKnow.pdf

Shoenfeld, A. (1994b). Reflections on doing and teaching mathematics. I: Schoenfeld, A. (Red.), *Mathematical thinking and problem solving* (s. 53-70). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. I: *Educational studies in Mathematics 22* (s. 1-36). Holland: Kluwer Academic.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. I: P. Cobb (Red.), *Learning mathematics: Constructivist and interactionist theories of mathematical development* (s. 87-124). Holland: Kluwer.

Shapiro, S. (2000). Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics. UK: Oxford.

UVM (2003). Fælles mål: matematik (faghæfte 12, håndbogsserie 14, 2003). Danmark: Undervisningsminiteriet.

UVM (2009). Fælles mål: matematik (faghæfte 12, håndbogsserie 14, 2009). Lokaliseret den 30. november 2009 på http://www.uvm.dk/service/Publikationer/Publikationer/Folkeskolen/2009/Faelles%20Maal%202009%20-%20Matematik.aspx

UVM. Læreplaner (juni 2008). Lokaliseret den 30. november 2009 på http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Love%20og%20regler/Laereplaner.aspx

Whitman, B. (1975). Intuitive equation solving skills and the effects on them of formal techniques of equation solving (Ph.D., Florida state university, microfilm nr. 76-2720).

Undervisningsmateriale

Carstensen, J. & Frandsen, J. (1997a). MAT 1. Danmark: Systime.

Carstensen, J. & Frandsen, J. (1997b). MAT 1: opgaver. Danmark: Systime.

Jensen, M. & Marthinus, K. (2006). MAT B1: HTX. Danmark: Systime.

Jensen, M. & Marthinus, K. (2009). Matematik på video. Danmark: Systime. Lokaliseret den 17. oktober 2009 (med login) på http://bogwebs.systime.dk/mathweb12/mathweb1/mathweb/MatVideoer/videoer.asp Lokaliseret den 30. november 2009 (udvalg uden login) på http://bogwebs.systime.dk/mathweb12/video.html

Jessen, C., Møller, P. & Mørk, F. (1997). Tal, geometri og funktioner. Danmark: Gyldendal.

Madsen, P. (1995). Teknisk matematik. Danmark: Erhvervsskolerne.

Litteratur anvendt uden henvisning

Bjørndal, C. (2003). Det vurderende øje – Observation, vurdering og udvikling i undervisning og vejledning. Århus: Klim.

Rienecker, L. & Jørgensen, P. (2008). Den gode opgave (3. udgave). Danmark: samfundslitteratur.

Skov, A. (2007). *Referér korrekt!: Om udarbejdelse af bibliografiske referencer*. København: Danmarks Biblioteksskole. Lokaliseret den 30. november 2009 på http://vip.db.dk/tutorials/referencer/default.htm