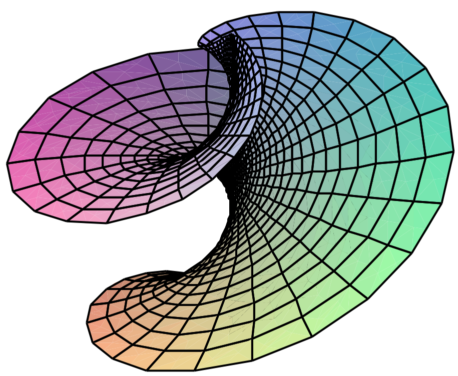
Den isoperimetriske ulighed

Bachelor projekt



Uffe Mose
Vejleder: Andrew Swann
Syddansk Universitet
Maj 2005

Indhold

Indledning

Et tidligt problem inden for matematikken er, hvordan man får den største mark, når man har en vis mængde hegn til rådighed. Svaret er simpelt, lav marken rund. Resultatet skriver vi som den isoperimetriske ulighed, som [Pressley] kap. 3.2 kalder: "The most important global result about plane curves" (Det vigtigste globale resultat om plane kurver). I $\mathbb{R}^2$ skriver vi den isoperimetriske ulighed

$$L^2 \geqslant 4\pi A,$$

som for en glat kurve kan vises ved hjælp af Wirtingers ulighed. Se [do Carmo] eller [Pressley]. Dette blev gjort i Geometri I (MM08).

Men vi behøver ikke blive i planen. I Euklidisk rum fortæller den isoperimetriske ulighed os om forholdet mellem overfladearealet af et domæne og dets volumen. Nærmere bestemt siger uligheden, at for et givet overfladeareal af et domæne, kan domænet ikke have større volumen end en kugle med samme overfladearel som domænet.

Vi kan også danne isoperimetriske problemer på vilkårlige flader og domæner, og hermed kan man tænke sig alle mulige maksimering- og minimeringsproblemer. Faktisk behøver vi slet ikke have en glat flade for at kunne beskæftige os med den isoperimetriske ulighed.

Med udgangspunkt i en artikkel af Robert Osserman [Osserman,1978], skal vi se på beviset for den isodiametriske ulighed, der siger at volumen af en kompakt mængde i $\mathbb{R}^n$ er mindre end volumen af enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$ multipliceret med mængdens halve diameter i n'te potens (volumen af en kugle i $\mathbb{R}^n$ med samme diameter som mængden), uden at stille krav om en glat overflade. Og ved hjælp af Brunn-Minkowski, vise den isoperimetriske ulighed i $\mathbb{R}^n$.

Med udgangspunkt i samme artikkel ser vi i kapitel 2 på minimalflader, hvor vi opskriver et udtryk for areal og omkreds af billedet af enhedsskiven i $\mathbb{R}^2$ på en minimalflade. Vi sammenholder disse ved hjælp af Minkowskis ulighed for integraler, og finder ud af, at den isoperimetriske ulighed er gældende for alle minimalflader. Kapitlet afsluttes med et enkelt eksempel på en cirkelskive på en minimalflade.

Kapitel 1

Den isoperimetriske ulighed i Euklidisk rum

Vi skal i dette kapitel bevise den isodiametriske ulighed samt den isoperimetriske ulighed i Eulkidisk rum. Hertil skal vi bruge Steinersymmetriseringer til at kunne sige noget om den øvre grænse af en given mangfoldigheds volumen. For at sige noget om overfladearealet, skal vi benytte os af Minkowskiareaket, samt se på hvorfor det er hensigtsmæssigt. Og da ulighederne siger noget om en kugle, skal vi naturligvis også se på volumen og areal af en sådan.

Steiner symmetriseringer og den isodiametriske ulighed

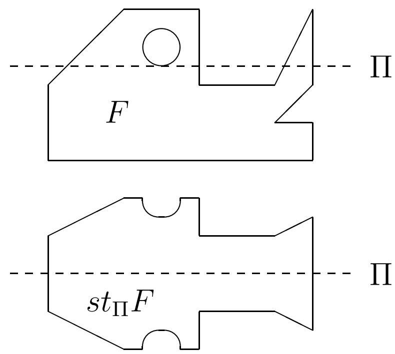
Først lidt notation, samt nogle definitioner.

Notation 1.1. $d\mathbf{v}_n(x)$ betegner standard Lebesgue målet af $\mathbb{R}^n$.

Notation 1.2. Vi lader $\mathbf{R}(n)$, eller blot $\mathbf{R}$, betegne foreningen af kompakte delmængder af $\mathbb{R}^n$

Definition 1.3. Lad Π være en hyperplan i $\mathbb{R}^n$, w et punkt i Π og l^w en linie i $\mathbb{R}^n$, der skærer Π vinkelret i w. Lad $\sigma_w = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1(l^w \cap F)$ og $I^w = [-\sigma_w, \sigma_w]$, hvor $F \in \mathbf{R}$. *Steinersymmetriseringen* af F med hensyn til Π defineres som:

$$\mathrm{st}_\Pi F = \bigcup_{w \in \Pi} \{w\} \times I^w.$$



(1.1)

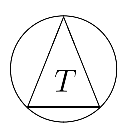
Figur (1.1) viser Steinersymmetriseringen af en mængde F. Bemærk at Steinersymmetriseringen bevarer volumen.

Notation 1.4. Vi skriver den afsluttede kugle i et metrisk rum (X, d) med radius ρ og centrum i $x_0 \in X$ som

$$D(x_0; \rho) = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant \rho\}$$

Definition 1.5. Lad (X, d) være et metrisk rum. For enhver kompakt delmængde K af X, defineres *radius af den omskrevne kugle* $r(K)$ og *diameteren af* K $\operatorname{diam} K$ som

$$\begin{aligned} r(K) &= \inf\{\rho > 0 : K \subseteq D(x; \rho),\ x \in X\}, \\ \operatorname{diam} K &= \sup\{d(x, y) : x, y \in K\}. \end{aligned}$$



(1.2)

Med figur (1.2) illustrerer jeg, at for en ligebenet trekant T, er $\operatorname{diam} T < 2r(T)$, da $\operatorname{diam} T$ er længden af den længste side i trekanten, mens $r(T)$ er radius i den omskrevne kugle. Det gælder desuden generelt, at

$$\operatorname{diam} K \leqslant 2r(K) \tag{1.3}$$

da ingen afstand indeholdt i den omskrevne kugle kan være større end $2r(K)$.

En vigtig egenskab for Steinersymmetriseringen er

Lemma 1.6. *For ethvert $F \in \mathbf{R}$ gælder:*

$$\operatorname{diam} \operatorname{st}_\Pi F \leqslant \operatorname{diam} F, \tag{1.4}$$

for enhver hyperplan Π i $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Figur 1.1 er tænkt, som hjælpetegning til følgende bevis. Lad $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, hvor $\Pi = \mathbb{R}^{n-1}$ og $l^{\mathbf{o}} = \mathbb{R}$, når $\mathbf{o}$ er origo i $\mathbb{R}^n$. Da F er kompakt kan vi finde to punkter med maksimal afstand i $\operatorname{st}_\Pi F$. Vi kalder disse punkter for (w, α) og (v, β). Dvs.

$$d((w, \alpha), (v, \beta)) = \operatorname{diam} \operatorname{st}_\Pi F, \tag{1.5}$$

hvor $w, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lad os arbejde med Euklidiske koordinater, da får vi:

$$d((w, \alpha), (v, \beta)) = \sqrt{|w - v|^2 + (\alpha - \beta)^2}, \tag{1.6}$$

så da st_Π er symmetrisk omkring Π, må:

$$\alpha = \pm\sigma_w, \quad \beta = \mp\sigma_v.$$

Lad

$$\begin{aligned} (w, \xi_w) &= \min l^w \cap F, \quad (w, \eta_w) = \max l^w \cap F, \\ (v, \xi_v) &= \min l^v \cap F, \quad (v, \eta_v) = \max l^v \cap F. \end{aligned}$$

Da gælder

$$\eta_w - \xi_w \geqslant 2|\alpha|, \quad \eta_v - \xi_v \geqslant 2|\beta|,$$

så

$$\eta_w - \xi_w + \eta_v - \xi_v \geqslant 2(|\alpha| + |\beta|).$$

Lad

$$\eta - \xi = \max\{\eta_w - \xi_v, \eta_v - \xi_w\},$$

så η er enten η_w eller η_v, og ξ tilsvarende er enten ξ_v eller ξ_w, da ligger enten (w, η) og (v, ξ) eller (w, ξ) og (v, η) i F, og da

$$\eta - \xi \geqslant |\alpha| + |\beta|,$$

og α og β har modsat fortegn, får vi

$$\mathit{diam}\ F \geqslant \sqrt{|w - v|^2 + (\eta - \xi)^2} \geqslant \sqrt{|w - v|^2 + (\alpha - \beta)^2} = \operatorname{diam} \operatorname{st}_\Pi F.$$

□

Notation 1.7. Lad (X, d) være et metrisk rum. For enhver $A \subseteq X$ og $\varepsilon > 0$ skriver vi

$$[A]_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leqslant \varepsilon\}.$$

Definition 1.8. For et metrisk rum (X, d) lader vi $\mathbf{X}$ betegne mængden af alle kompakte delmængder af X. For $E, F \in \mathbf{X}$ defineres *Hausdorffafstanden* $\delta(E, F)$ som

$$\delta(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 : E \subset [F]_\varepsilon, F \subset [E]_\varepsilon\}.$$

Vi lader fremover $\mathbf{X}$ betegne mængden af alle kompakte delmængder af et metrisk rum (X, δ) med Hausdorffmetrik.

Vi får brug for følgende lemma, samt Blaschkes udvalgs sætning til at vise lemma 1.12, som er et vigtigt redskab til beviset for den isodiametriske ulighed.

Lemma 1.9. *Lad X være et metrisk rum. Da er funktionerne*

$$K \mapsto r(K), \quad K \mapsto \operatorname{diam} K,$$

som sender $\mathbf{X}$ ind i $\mathbb{R}$, kontinuerte.

Hvis μ er et positivt mål på X, som er endelig på kompakte delmængder, da er

$$\limsup \mu(E_j) \leqslant \mu(\lim E_j) \tag{1.7}$$

for enhver konvergent følge $(E_j) \subseteq \mathbf{X}$.

Bevis. Vi viser først at $K \mapsto r(K)$ er kontinuert, ved at vise at en lille ændring af K medfører en lille ændring af $r(K)$. Hvis $E, F \in \mathbf{X}$ opfylder $\delta(E, F) < \varepsilon$, for $\varepsilon > 0$, da har vi, at for et vilkårligt $x \in X$ og $R > 0$ hvor $E \subseteq D(x; R)$ gælder, at $F \subseteq D(x; R + \varepsilon)$. Hvilket betyder at

$$r(F) \leqslant r(E) + \varepsilon$$

ved at bytte roller for E og F, får vi ligeledes, at

$$r(E) \leqslant r(F) + \varepsilon$$

Så da

$$|r(E) - r(F)| \leqslant \varepsilon,$$

er $K \mapsto r(K)$ kontinuert.

Efter samme princip vises nu at $K \mapsto \operatorname{diam} K$ er kontinuert. Lad igen $E, F \in \mathbf{X}$ opfylde at $\delta(E, F) < \varepsilon$, for $\varepsilon > 0$. Da har vi at $E \subseteq [F]_\varepsilon$, hvilket medfører, at

$$\operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} [F]_\varepsilon \leqslant \operatorname{diam} F + 2\varepsilon.$$

Tilsvarende fås, at

$$\operatorname{diam} F \leqslant \operatorname{diam} E + 2\varepsilon,$$

Så

$$|\operatorname{diam} E - \operatorname{diam} F| < 2\varepsilon,$$

hvormed også $K \mapsto \operatorname{diam} K$ er kontinuert.

Da (E_j) er konvergent, vises den sidste del af lemmaet ved at lade $E_j \to E$. For et vilkårligt $\varepsilon > 0$ vil $E_j \subseteq [E]_\varepsilon$, for et passende stort j. For samme j har vi derfor, at $\mu(E_j) \leqslant \mu([E]_\varepsilon)$, hvormed

$$\limsup \mu(E_j) \leqslant \mu([E]_\varepsilon)$$

for alle $\varepsilon > 0$. Derfor lader vi ε gå mod nul, hvormed (1.7) er opfyldt. □

Sætning 1.10 (Blaschkes udvalgs sætning)**.** *Lad (X, d) være et metrisk rum hvor afsluttede og begrænsede delmængder er kompakte. Da er $\mathbf{X}$, mængden af kompakte delmængder af X, fuldstændig. Og hvis X er kompakt, da er $\mathbf{X}$ også kompakt.*

Bevis. Lad (E_j) være en Cauchyfølge i $\mathbf{X}$, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon > 0\, \forall i, j \geqslant N_\varepsilon : \delta(E_i, E_j) < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Betragt

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i} \tag{1.9}$$

hvor stregen over foreningen symboliserer afslutningen af foreningen. Vis nu at E_j konvergerer mod E.

Da (E_j) er en Cauchyfølge, er $\bigcup_{i \geqslant j} E_i$ begrænset for alle j, så $\overline{\bigcup_{i \geqslant j} E_i}$ er en kompakt, ikke tom, mængde.

Fra (1.8) får vi

$$\overline{\bigcup_{i \geqslant j} E_i} \subseteq [E_j]_\varepsilon \quad \forall j \geqslant N_\varepsilon,$$

så

$$E \subseteq [E_j]_\varepsilon \quad \forall j \geqslant N_\varepsilon.$$

Vi viser nu

$$E_j \subseteq [E]_\varepsilon \quad \forall j \geqslant N_\varepsilon$$

ved at tage et $x \in E_j$, hvilket medfører, at $x \in [E_i]_\varepsilon$ for alle $i \geqslant j$. Så

$$x \in \bigcup_{i \geqslant k} [E_i]_\varepsilon = \Big[\bigcup_{i \geqslant k} E_i\Big]_\varepsilon \quad \forall k \geqslant j.$$

Der kan derfor findes et $y_k \in \bigcup_{i \geqslant k} E_i$, så $d(x, y_k) \leqslant \varepsilon$. Da (y_k) er en begrænset følge og $y_l \in \bigcup_{i \geqslant k} E_i$ for alle $l \geqslant k$, kan vi finde en delfølge af (y_k), der konvergerer mod et punkt $x_0 \in \overline{\bigcup_{i \geqslant k} E_i}$ for alle $k \geqslant j$. Det betyder at $x_0 \in E$ og $d(x, x_0) \leqslant \varepsilon$, hvormed $x \in [E]_\varepsilon$. Så enhver Cauchyfølge i $\mathbf{X}$ er konvergent, hvormed $\mathbf{X}$ er fuldstændig.

Vi antager nu at X er kompakt, og ønsker at vise at også $\mathbf{X}$ er kompakt. Hvis der er endelig mange elementer i X er beviset trivielt. Antag derfor at det ikke er tilfældet og lad (E_j) være en følge i $\mathbf{X}$, hvor E_j'erne er forskellige, og lad $\varepsilon > 0$. Da X er kompakt, findes en endelig overdækning af X bestående af metriske kugler $B(x_i; \varepsilon), i = 1, \cdots, M$, og desuden har X mindst et fortætningspunkt. Dvs. der findes mindst en delmængde

$$\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_l}\} \subseteq \{x_1, \cdots, x_M\}$$

hvorom kardinaliteten

$$\mathrm{kard}\left\{E_s : E_s \subset \bigcup_{k=1}^{l} B(x_{i_k}; \varepsilon), E_s \cap B(x_{i_k}; \varepsilon) \neq \varnothing \; \forall i_k\right\} = \aleph_0,$$

hvor $\aleph_0$ er kardinaliteten af de naturlige tal. Så for alle E_s har vi

$$E_s \subset \bigcup_{k=1}^{l} B(x_{i_k}; \varepsilon) \subset [E_s]_{2\varepsilon}.$$

Lad E_i være en følge i $\mathbf{X}$, og sæt $E_{i;0} = E_i$. Antag $(E_{i;N})$ er en delfølge af (E_i). Vælg en delfølge $(E_{i;N+1})$ af $(E_{i;N})$ efter samme princip som E_s, men i forhold til $(E_{i;N})$ i stedet for (E_j). Og lad $\varepsilon_N = 1/(N+1)$. Lad

$$G_{N+1} = \bigcup_{k=1}^{l_{n+1}} B(x_{i_{k;N+1}}; \varepsilon_N).$$

Da får vi

$$E_{i;N+1} \subset G_{N+1} \subset [E_{i;N+1}]_{2\varepsilon_N},$$

hvormed

$$\delta(E_{i;N+1}, G_{N+1}) < 2\varepsilon_N,$$

så

$$\delta(E_{i;N+1}, E_{j;N+1}) < 4\varepsilon_N = \frac{4}{N+1}$$

for alle i, j. Lader vi $F_N = E_{N;N}$ får vi

$$\delta(F_N, F_{N'}) < \frac{4}{\min\{N, N'\}},$$

så (F_N) er en Cauchyfølge. Og da vi har vist at $\mathbf{X}$ er fuldstændig, er (F_N) konvergent og dermed begrænset. Så $\mathbf{X}$ er kompakt. $\square$

Definition 1.11. lad (X, d) være et metrisk rum, så afsluttede og begrænsede delmængder af X er kompakte. For ethvert kompakt $K \subseteq X$ findes et $x_0 \in X$ så vi kan definere *den omskrevne kugle af* K som

$$D_K = D(x_0; r(K)).$$

Lemma 1.12. *Antag at μ er et positivt mål på X, og for alle $x, y \in X$ eksisterer der en bijektion $\Phi : X \to X$ som sender x ind i y, og som bevarer mål og afstande. Lad for et givet $K \in \mathbf{X}$ gælde*

$$\mathbf{M}(K) = \{F \in \mathbf{X} : \mu(F) = \mu(K),\ \mu([F]_\varepsilon) \leqslant \mu([K]_\varepsilon)\ \forall\varepsilon > 0\}, \tag{1.10}$$
$$\mathbf{N}(K) = \{F \in \mathbf{X} : \mu(F) \geqslant \mu(K),\ \operatorname{diam} F \leqslant \operatorname{diam} K\}. \tag{1.11}$$

Da findes et $E \in \mathbf{M}(K)$ og et $E' \in \mathbf{N}(K)$ så

$$r(E) = \min_{F \in \mathbf{M}(K)} r(F) \quad og \quad r(E') = \min_{F \in \mathbf{N}(K)} r(F).$$

Bevis. Da vi i begge tilfælde ønsker at finde en mindste $r(F)$, er det nok at kikke på $F \in \mathbf{X}$ hvor $r(F) \leqslant r(K)$.

Da vi har antaget at der findes en mål- og afstandbevarende funktion Φ, som sender x til y for alle $x, y \in X$, er det nok at se på

$$\mathbf{H} = \{F \in \mathbf{X} : F \subseteq D_K\}.$$

Bemærk at $\mathbf{H}$ ifølge sætning 1.10 er kompakt.

For at vise (1.10) Lader vi

$$\mathbf{M}_0(K) = \mathbf{H} \cap \mathbf{M}(K),$$

og

$$\alpha = \inf_{F \in \mathbf{M}(K)} r(F) = \inf_{F \in \mathbf{M}_0(K)} r(F).$$

Der findes en følge $(F_j) \in \mathbf{M}_0(K)$, hvor $r(F_j) \to \alpha$ for $j \to \infty$. Da $F_j \in \mathbf{M}_o(K) \subseteq \mathbf{H}$, ligger F_j i det kompakte rum $\mathbf{H}$. Så vi kan finde en delfølge E_k af F_j, som konvergerer mod et $E \in \mathbf{H}$. Da $F \mapsto r(F)$ ifølge lemma 1.9 er kontinuert, er $r(E) = \alpha$. Vi skal derfor vise at $E \in \mathbf{M}(K)$. Da $\mu(E_k) = \mu(K)$ for alle k, gælder der ifølge (1.7) at $\mu(K) \leqslant \mu(E)$.

Da E_j konvergerer mod E gælder

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists J > 0\ \forall j \geq J \ \mid\ E \subseteq [E_j]_\varepsilon$$

Heraf har vi

$$[E]_h \subseteq [E_j]_{\varepsilon+h} \quad \forall h > 0$$

og dermed

$$\mu([E]_h) \leqslant \mu([E_j]_{\varepsilon+h}) \leqslant \mu([K]_{\varepsilon+h}).$$

Sidste ulighed gælder da $E_j \in \mathbf{M}_0(K)$. Lader vi $\varepsilon \to 0$ får vi, at $\mu([E]_h) \leqslant \mu([K]_h)$ for alle $h > 0$, lader vi også $h \to 0$ får vi, at $\mu(E) \leqslant \mu(K)$, dvs. $\mu(E) = \mu(K)$, hvormed vi har vist, at $E \in \mathbf{M}(K)$ og dermed er (1.10) vist.

For at vise (1.11) lader vi

$$\mathbf{N}_0(K) = \mathbf{H} \cap \mathbf{N}(K),$$

og

$$\beta = \inf_{F \in \mathbf{N}(K)} r(F) = \inf_{F \in \mathbf{N}_0(K)} r(F).$$

$\mathbf{N}(K)$ kan også skrives

$$\mathbf{N}(K) = \mu^{-1}([\mu(K), \infty[) \cap \operatorname{diam}^{-1}([0, \operatorname{diam} K])$$

Da $\mu : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ og $\operatorname{diam} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ er kontinuerte, og $[\mu(K), \infty[$ og $[0, \operatorname{diam} K]$ er afsluttede, er også $\mathbf{N}(K)$ afsluttet. Nu har vi at $\mathbf{H}$ er kompakt og $\mathbf{N}(K)$ er afsluttet, så $\mathbf{N}_0(K)$ er kompakt.

Der findes en følge $(F_j') \in \mathbf{N}_0(K)$ hvor $r(F') \to \beta$ for $j \to \infty$. Da $F \mapsto \operatorname{diam} F$ er kontinuert ifølge lemma 1.9 og $\mathbf{N}_0(K)$ er kompakt, finder vi nu en delfølge E_k' af F_j', som konvergerer mod $E' \in \mathbf{N}_0(K)$. Da $F \mapsto r(F)$ er kontinuert, er $r(F') = \beta$ og $E' \subseteq \mathbf{N}_0(K) \subseteq \mathbf{N}(K)$. $\square$

Definition 1.13. Givet to punkter $x, y \in \mathbf{R}$, hvor $x \neq y$. Lad l være en linie der skærer x og y, og $p = \frac{1}{2}(x+y)$ punktet på l med samme afstand til x og y. Da kalder vi en hyperplan der skærer p ortogonal på l for *spejlplanen for x og y.*

Bemærk, hvis $x, y \in S$, hvor S er randen af D_K for $K \in \mathbf{R}$, da går spejlplanen for x og y gennem centrum af D_K.

Lemma 1.14. *Antag $K \neq D_K$ for et $K \in \mathbf{R}$, og lad S være randen af D_K. Antag $D(x;\varepsilon) \cap S \subseteq S \backslash K$ for et $x \in S \backslash K$ og et $\varepsilon > 0$, og vælg $x' \in S$ forskellig fra x. Lad Π være spejlplanen for x og x', og lad $K' = \operatorname{st}_\Pi K$. Da gælder*

$$S \backslash K \subseteq S \backslash K' \tag{1.12}$$

$$D(x';\varepsilon) \cap S \subseteq S \backslash K'. \tag{1.13}$$

Bevis. Antag at centrum af D_K ligger i origo og, at x har positive koordinater, og er placeret således i forhold til x' at $\Pi = \{x_n = 0\}$. Kan vi vise (1.12) og (1.13) i dette tilfælde, gælder de også for K.

Vi har $S = \{\|x\| = r(K)\}$. Lad $a^+ = (w, x_n)$ være et punkt i den åbne mængde $S \backslash K$, og $a^- = (w, -x_n)$, hvor $w \in \Pi$, med $\|w\| \leqslant r(K)$. Og lad $x_n = \sqrt{r(K)^2 - \|w\|^2}$. Da $S \backslash K$ er åben, har vi at der findes et $\delta > 0$, så

$$D(a^+; \delta) \cap K = \varnothing.$$

Genkalder vi størrelserne fra definition 1.3 om Steinersymmetriseringen, får vi

$$l^w \cap K \subseteq [-x_n, x_n - \delta],$$

hvormed

$$\mathbf{v}_1(l^w \cap K) \leqslant \mathbf{v}[-x_n, x_n - \delta] \leqslant 2x_n - \delta < 2x_n.$$

Så $\sigma_w < x_n$, hvormed

$$(\{w\} \times I^w) \cap S = \varnothing,$$

så $a^+, a^- \in S \backslash K'$. Da a^+ er arbitrær, får vi (1.12) og (1.13) opfyldt for K. $\square$

Endnu en vigtig egenskab for Steinersymmetriseringen er

Lemma 1.15. *Lad $K \in \mathbf{R}$, og antag $K \neq D_K$. Da findes et endeligt antal hyperplaner $\Pi_1, \cdots, \Pi_k$ så*

$$r(\mathrm{st}_{\Pi_1} \circ \cdots \circ \mathrm{st}_{\Pi_k} K) < r(K). \tag{1.14}$$

Bevis. Lad S være randen af D_K. I tilfældet hvor $K \cap S = S$, vil en vilkårlig Steinersymmetrisering sende det hul der må være i K, da $K \neq D_K$, ud til kanten af K, hvormed $\mathrm{st}_\Pi K \cap S \neq S$. Det er derfor nok at se på tilfældet $K \cap S \neq S$.

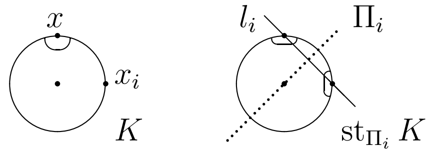
Bemærk at det giver mening at sammensætte Steinersymmetriseringer, da Steinersymmetriseringen af en kompakt mængde, selv er kompakt. Da $S \backslash K$ er åben findes et $x \in S$ og et $\varepsilon > 0$, så

$$D(x; \varepsilon) \cap S \subseteq S \backslash K$$

Da S er begrænset kan vi vælge $x_i \in S,\ i = 1, 2, \cdots, k,\ x_i \neq x$, så

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} D(x_i; \varepsilon).$$

Lad Π_i være spejlplanen for x og x_i. For et givet $x_i \in S$, får vi da, ifølge lemma 1.14, at $D(x_i;\varepsilon) \cap S \subseteq S \setminus \operatorname{st}_{\Pi_i} K$.



(1.15)

Tager vi nu Steinersymmetriseringen af alle Π_i, får vi en kompakt mængde der ligger inden i S, altså

$$(\operatorname{st}_{\Pi_1} \circ \cdots \circ \operatorname{st}_{\Pi_k} K) \cap S = \varnothing,$$

Hvilket beviser (1.14) som ønsket. □

Det kunne være sjovt at se på hvor mange Steinersymmetrier vi skal bruge for at $r(\operatorname{st}_{\Pi_1} \circ \cdots \circ \operatorname{st}_{\Pi_k} K) < r(K)$ i lemma 1.15. Lad os kalde antallet af Steinersymmetrier vi skal bruge for α. Da Steinersymmetriseringen maksimalt kan fordoble målet af $S \setminus K$, må

$$\frac{\mathbf{v}_{n-1}(S)}{\mathbf{v}_{n-1}(S \setminus \operatorname{st}_{\Pi} K)} \leqslant 2^{\alpha-1},$$

hvor der kun kan være lighed ved $\alpha = 1$, da S er åben. Vi starter med en Steinersymmetrisering af K, for at undgå situationen hvor $\mathbf{v}_{n-1}(S \setminus K)$ er nul under antagelsen at $K \neq D_K$.

Har man en afsluttet kugle i $\mathbb{R}^n$ med radius ε, kunne vi stille opgaven at finde et mindste antal sådanne kugler der skal bruges for at overdække randen af en større kugle i $\mathbb{R}^n$ med radius $r(K)$. Kalder vi dette tal for $N_\varepsilon(K)$, ved vi nu om α, at

$$1 + \log_2\left(\frac{\mathbf{v}_{n-1}(S)}{\mathbf{v}_{n-1}(S \setminus \operatorname{st}_{\Pi} K)}\right) \leqslant \alpha \leqslant N_\varepsilon(K).$$

Vi skal ikke finde $N_\varepsilon(K)$ her, men lader opgaven stå åben. $N_\varepsilon(K)$ er en højt sat, men sikker grænse for α, som mugligvis kan optimeres.

Vi skal nu se lidt på kuglen i Euklidisk rum.

Notation 1.16. ω_n er den n-dimensionale volumen af énhedskuglen $\mathbb{B}^n$ i $\mathbb{R}^n$.

Vi kan skrive volumen af en n-dimmensional kugle B i $\mathbb{R}^n$ med radius ρ som

$$V_n(B_\rho) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}\rho^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}\rho^n. \tag{1.16}$$

Hvor Γ er den sædvanlige gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt, \quad x > 0$$

Lad nemlig kuglen i $\mathbb{R}^n$ være givet ved

$$\gamma(r,\theta,z) = (x_1, x_2, y) = (\rho r\cos\theta, \rho r\sin\theta, \rho\sqrt{1-r^2}z)$$

for $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leq 2\pi$ og $\|z\| \leqslant 1$, hvor ρ er radius i kuglen. Vi ønsker at finde volumet af kuglen, og bruger lineær variabelskift, hvor

$$dV = dx_1dx_2dy = \left|\frac{\partial(x_1,x_2,y)}{\partial(r,\theta,z)}\right| drd\theta dz,$$

hvor $|\partial(x_1,x_2,y)/\partial(r,\theta,z)|$ er determinanten til Jacobimatricen $J(\gamma(r,\theta,z))$.

$$J(\gamma(r,\theta,z)) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho r\sin\theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \rho\sin\theta & \rho r\cos\theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-\rho r}{\sqrt{1-r^2}}z & 0 & \rho\sqrt{1-r^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{-\rho r}{\sqrt{1-r^2}}z & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho\sqrt{1-r^2} \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} \det J(\gamma(r,\theta,z)) &= \rho^2 r\cos^2\theta\rho^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} + \rho^2 r\sin^2\theta\rho^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \rho^n r(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}, \end{aligned}$$

hvormed

$$V_n(B_\rho) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{|z|\leqslant 1} \rho^n r\sqrt{1-r^2}^{n-2}dzd\theta dr.$$

Så

$$V_n(B_\rho) = \rho^n V_n(B_1) = \rho^n V_{n-2}\frac{2\pi}{n}.$$

Så vi får

$$V_n(B_\rho) = \begin{cases} \rho^n \frac{(2\pi)^{n/2}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} & n \textit{ lige} \\ \rho^n \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots n} & n \textit{ ulige}. \end{cases}$$

For n lige, følger (1.16) ved at dele tælleren med $2^{n/2}$. Og da

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}n) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-2)/2}},$$

hvor

$$n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 & n>0 \textit{ ulige} \\ n\cdot(n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 & n>0 \textit{ lige} \\ 1 & n=-1,0, \end{cases}$$

se [Weisstein], får vi også (1.16) for n ulige.

Sætning 1.17 (Den Isodiametriske ulighed)**.**

$$\mathbf{v}_n(K) \leqslant \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2}\right)^n, \quad \forall\, K \in \mathbf{R}. \tag{1.17}$$

Bevis. Genkald $E' \in \mathbf{N}(K)$ fra lemma 1.12, hvor $r(E') = \min_{F\in\mathbf{N}(K)} r(F)$. Bemærk at hvis $F \in \mathbf{N}(K)$ har vi, at $\operatorname{st}_\Pi F \in \mathbf{N}(K)$, da

$$\mu(\operatorname{st}_\Pi F) = \mu(F) \geqslant \mu(K)$$

og der fra (1.4) gælder

$$\operatorname{diam}\operatorname{st}_\Pi(F) \leqslant \operatorname{diam} F \leqslant \operatorname{diam} K.$$

Antag $E' \neq D_{E'}$. Fra lemma 1.15 har vi, at vi med endelig mange Steinersymmetriseringer af E' får en mængde E'', hvor $r(E'') < r(E')$. Men det er i modstrid med definitionen af E', så $E' = D_{E'}$.

Vi har defor at

$$2r(E') = 2r(D_{E'}) = \operatorname{diam} D_{E'} = \operatorname{diam} E' \leqslant \operatorname{diam} K.$$

Så

$$\frac{\operatorname{diam} K}{2} \geqslant r(E'),$$

hvormed

$$\omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2}\right)^n \geqslant \omega_n (r(E'))^n = v_n(E') \geqslant v_n(K),$$

og den isodiametriske ulighed er vist. □

Minkowskiareal og den isoperimetriske ulighed

Vi skal vise den isoperimetriske ulighed ved hjælp af Brunn-Minkowskis ulighed. Men lad os først se lidt på Minkowskiarealet.

Definition 1.18. Lad $K \subset \mathbb{R}$ være kompakt. *Minkowskiarealet* $\operatorname{Mink}(K)$ defineres nu som

$$\operatorname{Mink}(K) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{\mathbf{v}_n([K]_h) - \mathbf{v}_n(K)}{h}.$$

Bemærk for $n = 1$ er

$$\text{Mink}(K) = 2N_K, \tag{1.18}$$

hvis K er en endelig forening af N_K disjunkte lukkede intervaller. Ellers er $\text{Mink}(K) = \infty$.

Sætning 1.19. *Lad K være afslutningen af et domæne Ω i $\mathbb{R}^n$, med glat rand $\delta\Omega$, da er*

$$\text{Mink}(K) = A_n(\delta\Omega), \tag{1.19}$$

hvor A_n betegner det $(n-1)$-dimensionale standard Riemann areal.

Dvs. Minkowskiarealet af et kompakt K, er lig overfladearealet af K. Sætningen vil ikke blive vist her, men lad os kikke på et eksempel og se på Minkowskiarealet af en kugle B_ρ i $\mathbb{R}^n$ med radius ρ.

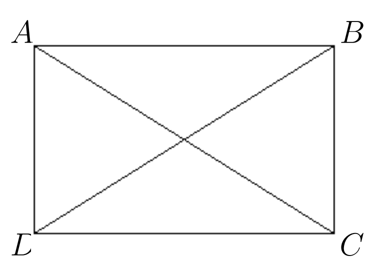
$$\begin{aligned}
\text{Mink}(B_\rho) &= \liminf_{h \searrow 0} \frac{\mathbf{v}_n([B_\rho]_h) - \mathbf{v}_n(B_\rho)}{h} \\
&= \omega_n \liminf_{h \searrow 0} \frac{(\rho + h)^n - \rho^n}{h} \\
&= n\omega_n \rho^{n-1}
\end{aligned}$$

Så vi finder arealet af randen af B_ρ til

$$A_n(\delta B_\rho) = n\omega_n\rho^{n-1}. \tag{1.20}$$

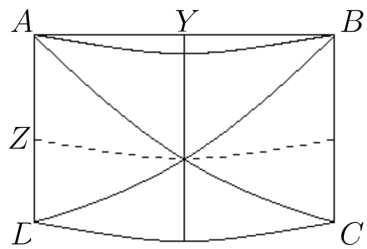
Lad os se på hvorfor vi bruger Minkowskiarealet. Man kunne jo forestille sig at vi kunne dele en flade op i mange små plane flader, og med infinitisimalregning finde frem til arealet. Desværre har man ikke kunne finde en generel metode til dette. Lad os kikke på Schwarz tælleeksempel for at illustrere dette. Eksemplet findes også i [Körner] opgave 9.64.

Antag at vi har en rektangel med højde 1 og længde 2π. Del rektanglet op i $m \times n$ rektangler med højde m^{-1} og længde n^{-1} og kald hjørnerne i et af disse delrektangler for A, B, C og D. Tegn diagonalerne i rektangel $ABCD$ op og kald midtpunktet i rektanglet for X. Se figur (1.21).



(1.21)

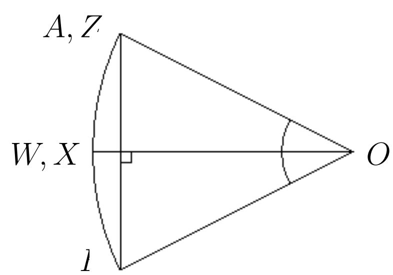
Vi bøjer nu rektanglet til en cylinder med højde og radius lig 1. Se igen på rektangel $ABCD$ i den bøjede version, og kald midtpunktet på liniestykket AD for Z, midtpunktet på kurven AB for W og midtpunktet mellem A og B for Y. Se figur (1.22).



(1.22)

Vi danner nu fire plane trekanter ADX, ABX, BCX og CDX. Ideen er at finde arealet af disse trekanter, og ved at lade m og n gå mod uendeligt, se om vi har fået en god metode at beregne arealet af en fx. cylinder på.

Længden af liniestykke AD er m^{-1}, og afstanden fra X til W er m^{-2}. Vi kikker på cylindren ovenfra for at finde de afstandene ZX, AB og YW. Se figur (1.23).



(1.23)

Vi lader nu O betegne cylindrens centerlinie. Det ses nu at afstanden $AB = 2\sin(V/2) = 2\sin(\pi/n)$, og afstanden $ZX = 2\sin(V/4) = 2\sin(\pi/2n)$ da cylindrens radius er 1. Afstanden $OY = \cos(V/2) = \cos(\pi/n)$, så afstanden $WY = 1 - \cos(\pi/n) = 2\sin^2(\pi/2n)$. Heraf finder vi arealet af trekant ADX til $m^{-1}\sin(\pi/2n)$ og arealet af trekant ABX til $\sin(\pi/n)((2m)^{-2} + 4\sin^4(\pi/2n))^{1/2}$. Da arealet af trekant ADX og BCX er ens, og arealet af trekant ABX og CDX er ens fås arealet af hele cylindren til

$$A(m,n) = 2n\sin(\tfrac{\pi}{2n}) + n\sin(\tfrac{\pi}{n})\big(1 + 16m^2\sin^4(\tfrac{\pi}{2n})\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(\tfrac{\pi}{n}) = \pi \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} n\sin(\tfrac{\pi}{2n}) = \tfrac{\pi}{2},$$

skal $16m^2\sin^4(\frac{\pi}{2n})$ gå mod nul for at vi får arealet af cylindren, men hvis vi lader m og n vokse så m/n^2 går mod λ, når m, n går mod uendeligt, finder vi grænseværdien af $A(m,n)$ til $\pi + \pi(1+\lambda^2\pi^4)^{1/2}$. Vi kan altså med denne metode få ethvert resultat større end eller lig med 2π afhængig af hvordan vi vælger vores λ.

Sætning 1.20 (Brunn-Minkowskis ulighed)**.** *Lad $K \in \mathbf{R}$ og lad D være den lukkede kugle i $\mathbb{R}^n$ med samme mål som K. Dvs. $\mathbf{v}_n(D) = \mathbf{v}_n(K)$, da gælder*

$$\mathbf{v}_n([D]_\varepsilon) \leqslant \mathbf{v}_n([K]_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.24}$$

Bevis. Vi viser først at (1.24) er sand for $n=1$, ved hjælp af Minkowskiarealet.

$$\liminf_{h\searrow 0} \frac{\mathbf{v}_1([K]_h) - \mathbf{v}_1(K)}{h} = \mathrm{Mink}(K) \geqslant 2N_K \geqslant$$
$$2 = \mathrm{Mink}(D) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{\mathbf{v}_1([D]_h) - \mathbf{v}_1(D)}{h},$$

så

$$\liminf_{h\searrow 0} \mathbf{v}_1([K]_h) - \mathbf{v}_n(K) \geqslant \liminf_{h\searrow 0} \mathbf{v}_1([D]_h) - \mathbf{v}_n(D).$$

Men da $\mathbf{v}_n(D) = \mathbf{v}_n(K)$ har vi

$$\liminf_{h\searrow 0} \mathbf{v}_1([K]_h) \geqslant \liminf_{h\searrow 0} \mathbf{v}_1([D]_h).$$

Da

$$\mathbf{v}_1([K]_\varepsilon) \geqslant \liminf_{h\searrow 0} \{\mathbf{v}_1([K]_h) + 2(\varepsilon - h)\} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

og

$$\mathbf{v}_1([D]_\varepsilon) = \liminf_{h\searrow 0} \{\mathbf{v}_1([D]_h) + 2(\varepsilon - h)\} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

får vi

$$\mathbf{v}_1([K]_\varepsilon) \geqslant \mathbf{v}_1([D]_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.25}$$

For at vise sætningen for $n > 1$, viser vi først

$$\mathbf{v}_n([\mathrm{st}_\Pi F]) \leqslant \mathbf{v}_n([F]_\varepsilon) \tag{1.26}$$

for alle $F \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ og alle hyperplaner Π i $\mathbb{R}^n$.

Vælg Euklidiske koordinater i $\mathbb{R}^n$ så $\Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, dvs. så Π er ekvivalent med $\mathbb{R}^{n-1}$. Lad $\mathbf{o}$ være origo i $\mathbb{R}^n$ og $l^{\mathbf{o}} = \mathbb{R}$. Vi lader nu $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være projektionen på x^n-aksen $= l^{\mathbf{o}}$, og for alle $w \in \Pi$ lader vi $\tau_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være translationen til w. Endelig lader vi $\mathbf{D}(w;\varepsilon)$ betegne den lukkede $(n-1)$-kugle i Π med centrum i w og radius ε.

For et givet $w \in \Pi$ og $F \in \mathbf{R}$, har vi at $(w, \alpha) \in [F]_\varepsilon$ hvis og kun hvis der findes et $(v, \beta) \in F$ så

$$|w - v|^2 + (\beta - \alpha)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

hvilket vi har hvis og kun hvis

$$d_{\mathbb{R}^1}(\alpha, q(l^v \cap F)) \leqslant \xi,$$

hvor $\xi = \sqrt{\varepsilon^2 - |w - v|^2}$, så vi kan altså skrive

$$l^w \cap [F]_\varepsilon = \bigcup_{v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)} \tau\big(l^{\mathbf{o}} \cap [q(l^v \cap F)]_\xi\big).$$

Dvs. for et givet $v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)$ projekterer vi $l^v \cap F$ på x^n-aksen, gør den større med $[q(l^v \cap F)]_\xi$ og snitter den med x^n-aksen, hvorefter vi translaterer resultatet tilbage til w. Tager vi nu foreningen af alle $v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)$ får vi $l^w \cap [F]_\varepsilon$. Vi har derfor, at

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1(l^w \cap [F]_\varepsilon) &\geqslant \sup_{v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)} \mathbf{v}_1\big(\tau_w\big(l^{\mathbf{o}} \cap [q(l^v \cap F)]_\xi\big)\big) \\
&= \sup_{v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)} \mathbf{v}_1\big([q(l^v \cap F)]_\xi\big) \\
&\geqslant \sup_{v \in \mathbf{D}(w;\varepsilon)} \mathbf{v}_1\big([q(I^v)]_\xi\big) \\
&= \mathbf{v}_1(l^w \cap [\operatorname{st}_\Pi F]_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Hvor I^v, som i definition 1.3, betegner det lukkede interval $[-\frac{1}{2}\mathbf{v}_1(l^v \cap F), \frac{1}{2}\mathbf{v}_1(l^v \cap F)]$, som via (1.25) giver uligheden mellem linie to og tre. Og sidste lighedstegn er givet via vores konstruktion af v. Så vi har altså

$$\mathbf{v}_1(l^w \cap [F]_\varepsilon) \geqslant \mathbf{v}_1(l^w \cap [\operatorname{st}_\Pi F]_\varepsilon). \tag{1.27}$$

Vi har nu brug for nogle egenskaber ved Steinersymmetriseringen. Først bemærker vi at hvis K er kompakt, da er også Steinersymmetrien af K kompakt. Dernæst bemærker vi at

$$\mathbf{v}_1(I^w) = \mathbf{v}_1(l^w \cap K),$$

hvorfra vi får, at

$$\mathbf{v}_n(K) = \int_\Pi \mathbf{v}_1(l^w \cap K) d\mathbf{v}_{n-1}(w), \tag{1.28}$$

og

$$\mathbf{v}_n(\operatorname{st}_\Pi K) = \mathbf{v}_n(K) \tag{1.29}$$

for alle $K \in \mathbf{R}$. Sammenholder vi (1.27) med (1.28), får vi (1.26) som ønsket.

Vi har nu at $\mathbf{v}_n(\mathrm{st}_\Pi K) = \mathbf{v}_n(K)$ og $\mathbf{v}_n([\mathrm{st}_\Pi K]_\varepsilon) \leqslant \mathbf{v}_n([K]_\varepsilon)$ for alle $\varepsilon > 0$, så hvis vi genkalder lemma 1.12, og sætter $F = \mathrm{st}_\Pi K \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{M}(K)$, har vi at der findes et $E \in \mathbf{R}$, så $r(E) = \min_{F \in \mathbf{M}(K)} r(F)$. Vi ved, at $E = D_E$ da vi, ifølge lemma 1.15 og som ved beviset for den isodiametriske ulighed, ved modsat antagelse vil kunne tage endelig mange steiner symmetrier af E, og få en ægte delmængde af E, hvilket er i modstrid med antagelsen af E. Så da $\mathbf{v}_n([E]_\varepsilon) \leqslant \mathbf{v}_n([K]_\varepsilon)$ og $E = D$ da $\mathbf{v}_n(E) = \mathbf{v}_n(K)$, har vi vist Brunn-Minkowskis ulighed. □

Vi skriver den isoperimetriske ulighed i n-dimensioner, som uligheden hvor overfladearealet af $K \in \mathbb{R}^n$ er mindre eller lig med overfladearealet af en kugle i $\mathbb{R}^n$ med samme Lebesguemål som K.

Hvis B_ρ er en kugle i $\mathbb{R}^n$ med radius ρ, ved vi om dens volumen $V_n(B_\rho)$, at

$$V_n(B_\rho) = \omega_n \rho^n. \tag{1.30}$$

og fra (1.20) kender vi overfladearealet

$$A_n(\delta B_\rho) = n\omega_n \rho^{n-1}.$$

Vi ønsker et udtryk der fortæller om forholdet mellem areal og volumen af kuglen. Så vi sammenholder (1.30) og (1.20) får vi for en kugle i $\mathbb{R}^n$, at

$$A_n(\delta B_\rho)^n = n^n \omega_n V_n(B_\rho)^{n-1}.$$

Vi kan derfor beskrive den isoperimetriske ulighed i nedenstående sætning.

Sætning 1.21 (Den isoperimetriske ulighed i $\mathbb{R}^n$)**.** *Lad K være en kompakt mængde i $\mathbb{R}^n$. Da gælder om K's volumen V og overfladeareal A, at*

$$A^n \geqslant n^n \omega_n V^{n-1}, \tag{1.31}$$

med lighed hvis og kun hvis K er en kugle.

Bemærk at ligheden kun gælder i det tilfælde hvor K er en kugle. Beviset herfor er dog ret omfangsrigt i $\mathbb{R}^n$, og vi vil derfor undlade at vise denne del.

Bevis. Tager vi en kompakt mængde $K \in \mathbb{R}^n$, og lader D være kuglen med samme mål, dvs. samme volumen, som K, får vi ved hjælp af Brunn-Minkowski's ulighed, at

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mink}(K) &= \liminf_{h \searrow 0} \frac{\mathbf{v}_n([K]_h) - \mathbf{v}_n(K)}{h} \\
&\geqslant \liminf_{h \searrow 0} \frac{\mathbf{v}_n([D]_h) - \mathbf{v}_n(D)}{h} \\
&= \mathrm{Mink}(D).
\end{aligned}$$

K's overfladeareal $A_n(\delta K)$ er lig Mink(K), så hvis vi kalder Mink(D) for $A_n(\delta D)$ og radius af D for ρ, får vi fra (1.20), at

$$A_n(\delta K) \geqslant A_n(\delta D) = n\omega_n\rho^{n-1},$$

og da K's volumen $V_n(K)$ er lig D's volumen $V_n(D)$ får vi fra (1.30)

$$V_n(K) = \omega_n\rho^n.$$

Sammenholder vi nu $A_n(\delta K)$ og $V_n(K)$ får vi den isoperimetriske ulighed. $\square$

Kapitel 2

Den isoperimetriske ulighed på minimalflader

Vi har set at den isoperimetriske ulighed er opfyldt i Euklidisk rum. Men vi kan naturligvis også opstille det isoperimetriske problem på flader, og her er minimalflader interessante, da det viser sig at den isoperimetriske ulighed er opfyldt på alle minimalflader.

I dette kapitel skal vi bruge holomorfe funktioner. Jeg giver en definition af en holomorf funktion, og henviser til [Rudin] kapitel 10 for mere information om holomorfe funktioner.

Definition 2.1. En *minimalflade* er en flade hvor middelkrumningen er nul overalt.

Definition 2.2. En kompleks funktion $f : U \to \mathbb{R}$ er *holomorf* hvis

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

eksisterer for alle $z_0 \in U$.

Notation 2.3. Vi lader $\mathcal{S}$ være en flade i $\mathbb{R}^3$. Og når $\mathcal{S}$ kan skrives som som en forening af homeomorfe $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathcal{S} \cap W$, hvor U er en åben mængde i $\mathbb{R}^2$, og W en åben mængde i $\mathbb{R}^3$, kalder vi $\boldsymbol{\sigma}$ for et fladeelemt.

Notation 2.4. Vi lader

$$\boldsymbol{\sigma}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{uv} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial u \partial v}.$$

Vi reserverer dusuden E, F og G så

$$E = \|\boldsymbol{\sigma}_u\|^2, \quad F = \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle, \quad G = \|\boldsymbol{\sigma}_v\|^2,$$

hvor $\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle$ er det indre produkt af $\boldsymbol{\sigma}_u$ og $\boldsymbol{\sigma}_v$.

Første fundamentalform kan nu skrives som

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{2.1}$$

Definition 2.5. En diffeomorfi $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ kaldes *konform* hvis der for ethvert fladeelement $\boldsymbol{\sigma}_1$ på $\mathcal{S}_1$ gælder

$$ds^2_{f\circ\boldsymbol{\sigma}_1} = \lambda^2 ds^2_{\boldsymbol{\sigma}_1},$$

hvor $ds^2_{\boldsymbol{\sigma}}$ er første fundamentalform for $\boldsymbol{\sigma}$, og $\lambda(u,v)$ er en glat funktion.

Væk fra navlepunkterne er et fladeelement derfor konformt, hvis første fundamentalform er lig med $E(du^2 + dv^2)$ for en positiv glat funktion E på U. Dvs. hvis $E = G$ og $F = 0$. Vi kalder også et konformt fladeelement, for en konform parameterisering.

Sætning 2.6. *Lad $\boldsymbol{\sigma}(u,v)$ være et minimalt fladeelement hvor Gauß-krumningen er forskellig fra nul overalt. Da er Gauß-afbildningen en konform afbildning fra $\boldsymbol{\sigma}$ til en del af enhedssfæren.*

Bevis. Invers funktionssætningen giver os, at for et punkt $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}$ hvori $\boldsymbol{\sigma}$ er defineret, findes en åben mængde U der indeholder (u_0, v_0), hvorpå $\boldsymbol{\sigma}$ er defineret, og $\mathbf{N}$ er injektiv. Så $\mathbf{N} : U \to S^2$ er et fladeelement på enhedssfæren S^2. Gauß-afbildningen er derfor en diffeomorfi fra $\boldsymbol{\sigma}(U)$ til $\mathbf{N}(U)$.

Vi skriver Gauß-afbildningen

$$\mathcal{G} : \boldsymbol{\sigma}(U) \to \mathbf{N}(U).$$

Så fra definitionen af en konform afbildning ved vi, at det vil være nok at vise, at første fundamentalform for $\boldsymbol{\sigma}$ og $\mathbf{N}$ er proportionale.

Vi skriver første fundamentalform for $\mathbf{N}$ som

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle \, du^2 + 2\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle \, dudv + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle \, dv^2.$$

Lad

$$\mathcal{F}_{III} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle & \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle \\ \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle & \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle \end{pmatrix},$$

og

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Vi skal altså vise at $\mathcal{F}_{III} = \lambda \mathcal{F}_I$, for en glat funktion λ.

Lad

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

hvor

$$L = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \quad M = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \mathbf{N} \rangle, \quad N = \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \mathbf{N} \rangle,$$

fra anden fundamentalform.

Fra [Pressley] proportion 6.4 har vi, at

$$\mathbf{N}_u = a\boldsymbol{\sigma}_u + b\boldsymbol{\sigma}_v, \quad \mathbf{N}_v = c\boldsymbol{\sigma}_u + d\boldsymbol{\sigma}_v,$$

hvor Weingardenmatricen

$$\mathcal{W} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}.$$

Vi kan da skrive $\mathcal{F}_{III}$ som

$$\mathcal{F}_{III} = \begin{pmatrix} a^2E + 2abF + b^2G & acE + (ad+bc)F + bdG \\ acE + (ad+bc)F + bdG & c^2E + 2cdF + d^2G \end{pmatrix},$$

eller på den lidt pænere form

$$\mathcal{F}_{III} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Vi omskriver udtrykket og får

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{III} &= -\mathcal{W}^t\mathcal{F}_I(-\mathcal{W}) \\ &= \mathcal{F}_{II}\mathcal{F}_i^{-1}\mathcal{F}_I\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} \\ &= \mathcal{F}_{II}\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} \end{aligned}$$

Så hvis $\mathcal{F}_{III} = \lambda\mathcal{F}_I$, vil

$$\lambda I_2 = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} = \mathcal{W}^2,$$

hvor I_2 er Identitetsmatricen. Vi skal altså vise at $\mathcal{W}^2 = \lambda I_2$, hvor I_2 er identitesmatricen.

Vi har forudsat, at $\kappa_1 = -\kappa_2 \neq 0$, så

$$\mathcal{W} = P^{-1}\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} P,$$

hvormed

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 &= P^{-1}\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} PP^{-1}\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} \kappa_1^2 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2 \end{pmatrix} P \\ &= \kappa_1^2 P^{-1} I_2 P \\ &= \kappa_1^2 I_2 \end{aligned}$$

dvs. Weingardenmatricen kvadreret er lig den negative Gauß-krumning, så Gauß-afbildningen er konform. $\square$

Notation 2.7. Lad $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ være et konformt fladeelement, da sætter vi det komplekse tal

$$\zeta = u + iv \quad \text{for } (u, v) \in U,$$

og

$$\varphi(\zeta) = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v. \tag{2.2}$$

Bemærk, en funktion $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ i $\mathbb{R}^3$ kaldes holomorf hvis φ_1, φ_2 og φ_3 i $\mathbb{R}$ er holomorfe.

Sætning 2.8. *Lad $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ være et konformt fladeelement. Da er $\boldsymbol{\sigma}$ minimal hvis og kun hvis $\varphi(\zeta) = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v$ er holomorf på U.*

Bevis. Lad $\varphi(u, v)$ være en glat funktion med kompleks værdi, så $\varphi = \alpha + i\beta$ hvor $\alpha = \boldsymbol{\sigma}_u$ og $\beta = -\boldsymbol{\sigma}_v$.

Vi bruger at φ er holomorf hvis og kun hvis Cauchy-Riemann ligningerne

$$\alpha_u = \beta_v \quad \text{og} \quad \alpha_v = -\beta_u$$

er opfyldte. Dvs. φ er holomorf hvis og kun hvis

$$(\boldsymbol{\sigma}_u)_u = (-\boldsymbol{\sigma}_v)_v \quad \text{og} \quad (\boldsymbol{\sigma}_u)_v = -(-\boldsymbol{\sigma}_v)_u,$$

eller blot hvis og kun hvis $\boldsymbol{\sigma}_{uu} = -\boldsymbol{\sigma}_{vv}$, da den anden lighed altid er opfyldt.

Antag φ er holomorf, dvs $\boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv} = 0$. Da er

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

så

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \mathbf{N} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = L + N = 0.$$

$\boldsymbol{\sigma}$ er konform, så $E = G$ og $F = 0$, hvormed middelkrumningen

$$\begin{aligned} H &= \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{LG + NG}{2EG} \\ &= \frac{L + N}{2E} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Så $\boldsymbol{\sigma}$ er minimal.

Antag $\boldsymbol{\sigma}$ er minimal. Da må $L + N = 0$, hvormed $\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = 0$.

$\{\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v, \mathbf{N}$ er en base for $\mathbb{R}^3$, så det er nok at vise at

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle = 0.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle &= \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_u + \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_v - \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_{uv} \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_u + \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_v - \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_u \\ &= \tfrac{1}{2}(\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle)_u + \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_v.\end{aligned}$$

Men da $\boldsymbol{\sigma}$ er konform, er $\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle$ og $\langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle = 0$, så $\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle = 0$. Tilsvarende er $\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle = 0$, Så $\boldsymbol{\sigma}_{uu} + \boldsymbol{\sigma}_{vv} = 0$, hvormed φ er holomorf. $\square$

Definition 2.9. En åben delmængde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ siges at være *simpel sammenhængende* hvis det indre af enhver simpel lukket kurve i U er helt indeholdt i U.

Sætning 2.10. *Hvis $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ er en konform parameteriseret minimalflade, da gælder for den holomorfe funktion $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ fra* (2.2)*, at*

$$\begin{array}{ll} (i) & \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \\ (ii) & \varphi \neq 0 \quad \textit{overalt.} \end{array}$$

Og omvendt, hvis U er simpel sammenhængende, og hvis φ_1, φ_2 og φ_3 er holomorfe funktioner på U, som opfylder (i) og (ii), da findes en konform parameteriseret minimalflade $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ så $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ opfylder $\varphi(\zeta) = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v$. Og hvis $\boldsymbol{\sigma}$ og $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ er to sådanne konform parameteriserede minimalflader, da findes en translation $\tau_{\mathbf{a}}$ af $\mathbb{R}^3$, så $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tau_{\mathbf{a}} \circ \boldsymbol{\sigma}$.

Bevis. Antag at $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ er en konform minimalflade, hvor $\sigma^k : U \to \mathbb{R}$ for $k = 1, 2, 3$. Vi ønsker da at vise at $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ opfylder (i) og (ii). Vi har at $\varphi_k = \sigma_u^k - i\sigma_v^k$ for $k = 1, 2, 3$, så

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^{3} ((\sigma_u^k)^2 - (\sigma_v^k)^2 - 2i\sigma_u^k\sigma_v^k) = \|\boldsymbol{\sigma}_u\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}_v\|^2 - 2i\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle. \quad (2.3)$$

Men da $\boldsymbol{\sigma}$ er konform er $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$.

Da første fundamentalform for $\boldsymbol{\sigma}$ kan skrives som $E(\boldsymbol{\sigma}_u^2 + \boldsymbol{\sigma}_v^2)$ for en glat funktion E, er $\boldsymbol{\sigma}$ glat, og da $\boldsymbol{\sigma}_u$ og $\boldsymbol{\sigma}_v$ er lineære uafhængige, er $\boldsymbol{\sigma}$ regulær, så enten $\boldsymbol{\sigma}_u$ eller $\boldsymbol{\sigma}_v$ forskellig fra nul, men da er også $\varphi \neq 0$ overalt.

Antag nu, at φ opfylder (i) og (ii). Vi ønsker da at vise at φ er bestemt ved ovenstående minimalflade.

For at vise dette skal vi huske på, at når h er en holomorf funktion af $\zeta = u + iv$ er

$$h_u = h' \quad \text{og} \quad h_v = ih',$$

hvor $h' = dh/d\zeta$ er den komplekse afledede af h.

Vælg $(u_0, v_0) \in U$, og lad $\boldsymbol{\sigma}$ være den reelle del af et komplekst linie integral

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \mathfrak{Re} \int_{\boldsymbol{\pi}} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

hvor $\boldsymbol{\pi}$ er en vilkårlig kurve i U fra (u_0, v_0) til $(u, v) \in U$. Da U er simpel sammenhængende, er $\int_{\boldsymbol{\pi}} \varphi(\xi)\, d\xi$, ifølge Cauchy's sætning, uafhængig af hvordan $\boldsymbol{\pi}$ er valgt, hvormed $\boldsymbol{\sigma}$ også er uafhængig af valget af $\boldsymbol{\pi}$. $\psi(\zeta) = \int_{\boldsymbol{\pi}} \varphi(\xi)\, d\xi$ er nu en holomorf funktion af $\zeta = u + iv$, hvor $\psi'(\zeta) = \varphi(\zeta)$. Så

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_u &= \mathfrak{Re}(\psi_u) = \mathfrak{Re}(\psi') = \mathfrak{Re}(\varphi), \\ \boldsymbol{\sigma}_v &= \mathfrak{Re}(\psi_v) = \mathfrak{Re}(i\psi') = -\,\mathfrak{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

hvormed $\varphi = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v$.

Da $\varphi = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v \neq 0$ ifølge (ii), er enten $\boldsymbol{\sigma}_u$ eller $\boldsymbol{\sigma}_v$ forskellig fra nul. Og når vi sammenholder (i) med (2.3) får vi, at $\|\boldsymbol{\sigma}_u\| = \|\boldsymbol{\sigma}_v\|$ og $\langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle = 0$, så $\boldsymbol{\sigma}_u$ og $\boldsymbol{\sigma}_v$ er begge forskellige fra nul, og orthogonale. Dermed er de også lineære uafhængige, så $\boldsymbol{\sigma}$ er et regulært fladeelement, som desuden er konformt og tillige minimal ifølge sætning 2.8.

Vi mangler nu blot at vise, at hvis $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ er en anden konform minimalflade så $\varphi(\zeta) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_u - i\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_v$, da kan vi finde en translation $\tau_{\mathbf{a}}$ af $\mathbb{R}^3$, så $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tau_{\mathbf{a}} \circ \boldsymbol{\sigma}$. Men hvis $\varphi(\zeta) = \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_u - i\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_v$, da er $\boldsymbol{\sigma}_u = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_u$ og $\boldsymbol{\sigma}_v = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_v$ overalt på U, hvormed $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$ er konstant. Lad os kalde denne konstant for $\mathbf{a}$, så $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ fremkommer ved at translatere $\boldsymbol{\sigma}$ ved en vektor $\mathbf{a}$. $\square$

Lemma 2.11. *Lad en simpelsammenhængende minimalflade være givet ved et kort fra enhedsskiven i $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^3$. Da er arealet af billedet A og længden af randen L givet som*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} |\varphi_k(e^{i\theta})|^2}\, d\theta$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} |\varphi_k(re^{i\theta})|^2 r\, dr\, d\theta.$$

Bevis. Lad $\gamma(\theta) = \boldsymbol{\sigma}(\cos\theta, \sin\theta)$ være en parameterisering af minimalfladen fra den todimensionale enhedsskive, så $\boldsymbol{\sigma}$ er konform jvf. sætning 2.10. Vi ønsker nu at finde længde og areal udtrykt ved φ.

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\sin\theta \boldsymbol{\sigma}_u + \cos\theta \boldsymbol{\sigma}_v,$$

så

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= \langle -\sin\theta \boldsymbol{\sigma}_u + \cos\theta \boldsymbol{\sigma}_v, -\sin\theta \boldsymbol{\sigma}_u + \cos\theta \boldsymbol{\sigma}_v \rangle \\ &= (\sin^2\theta E + \cos^2\theta G - 2\sin\theta\cos\theta F). \end{aligned}$$

Men da $\boldsymbol{\sigma}$ er konform, er $E = G$ og $F = 0$, så

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)E = E.$$

Heraf får vi at buelængden L er givet ved

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}\| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{E} \, d\theta,$$

og da

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \langle \varphi, \bar{\varphi} \rangle \\ &= |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 \\ &= \langle \boldsymbol{\sigma}_u - i\boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_u + i\boldsymbol{\sigma}_v \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle \\ &= 2E, \end{aligned}$$

får vi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{1}{2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2)} \, d\theta.$$

Og da arealet

$$A = \iint_{u^2+v^2 \leqslant 1} \sqrt{(EG - F^2)} \, du \, dv = \iint_{u^2+v^2 \leqslant 1} E \, du \, dv,$$

finder vi

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} rE \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\tfrac{1}{2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) \, d\theta \, dr.$$

$\square$

Lemma 2.12 (Jensens ulighed)**.** *Hvis* $0 < r < s$*, da er*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\Big)^{1/s} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\Big)^{1/r}, \tag{2.4}$$

når $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *og* $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$*.*

Lighed gælder når højst et a_i er forskelligt fra nul.

Bevis. For $\sum_{i=1}^{n} a_i^r = 0$ er uligheden triviel, da a_i nødvendigvis må være lig nul for alle i, hvormed også $\sum_{i=1}^{n} a_i^s = 0$. Ligeledes er uligheden triviel hvis højresiden ikke er endelig.

Antag $0 < \sum_{i=1}^{n} a_i^r < \infty$. Da findes et λ så

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i)^r = 1,$$

nemlig når $\lambda = \big(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\big)^{-1/r}$. Men da er $(\lambda a_i)^r \leqslant 1$, hvormed $\lambda a_i \leqslant 1$. Vi kan derfor se at $(\lambda a_i)^s \leqslant (\lambda a_i)^r$, og

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i)^s \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i)^r = 1 \tag{2.5}$$

Så ifølge (2.5) får vi uligheden

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\Big)^{1/s} &= \lambda^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i)^s\Big)^{1/s} \\ &\leqslant \lambda^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i)^r\Big)^{1/r} \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\Big)^{1/r}.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.13 (Minkowskis ulighed for integraler)**.** *For* $g_1, \dots, g_n$ *positive målelige lineært uafhængige funktioner, og* $0 < r < 1$ *gælder*

$$\Big(\int \big(\sum_{k=1}^{n} g_k\big)^r \, dx\Big)^{1/r} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(\int g_k^r \, dx\Big)^{1/r}. \tag{2.6}$$

Uligheden er fundet i [Hardy et al.] sætning 198, dog uden lighed.

Bevis. Fra [Rudin] Theorem 3.5 har vi Hölders ulighed

$$\int fg\,dx \leqslant \Big(\int f^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int g^q\,dx\Big)^{1/q} \tag{2.7}$$

hvor p og q er konjugerede eksponenter, og $1 < p < \infty$.

Lad $r = 1/p$, dvs. $0 < r < 1$ og lad $r' = r/(r-1)$. Sæt

$$u = (fg)^p, \quad v = g^{-p},$$

Vi får da

$$uv = f^p, \quad u^r = fg, \quad v^{r'} = g^q.$$

Fra Hölders Ulighed (2.7) får vi, at

$$\int u^r dx \leqslant \Big(\int uv\,dx\Big)^r\Big(\int v^{r'} dx\Big)^{1-r}.$$

Dvs. r og r' konjugerede eksponenter og $0 < r < 1$, har vi

$$\int uv\,dx \geqslant \left(\int u^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int v^{r'} dx\right)^{1/r'}, \tag{2.8}$$

når $uv \neq 0$ og u og v er positive målelige funktioner.

Lad nu $S = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Vi har derfor

$$\int S^r\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int g_k S^{r-1}\,dx,$$

og da $0 < r < 1$ giver Jensens ulighed, lemma 2.12 os, at

$$S = \sum_{k=1}^{n} g_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} g_k^r\right)^{1/r},$$

så

$$S^r \leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k^r.$$

Da $0 \leqslant \int g_k^r\,dx < \infty$ for alle k, har vi at også $0 \leqslant \int S^r\,dx < \infty$. Så når $g_k S^{r-1} \neq 0$, får vi fra (2.7), at

$$\int g_k S^{r-1}\,dx \geqslant \left(\int g_k^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int S^r\,dx\right)^{1/r'},$$

hvormed

$$\int S^r\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int g_k S^{r-1}\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(\int g_k^r\,dx\Big)^{1/r} \Big(\int S^r\,dx\Big)^{1/r'},$$

når $g_k \neq 0$ for alle k. Så

$$\Big(\int S^r\,dx\Big)^{1/r} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(\int g_k^r\,dx\Big)^{1/r}$$

□

Sætning 2.14. *Den isoperimetriske ulighed er opfyldt for minimalflader.*

Bevis. Lad $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion. Skriv $f(D(\mathbf{0};1)) = K \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Længden L_f af randen af f, og arealet A_f af f, er givet ved

$$L_f = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta, \quad A_f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 r\,d\theta\,dr.$$

Fra den isoperimetriske ulighed ved vi, at

$$L_f^2 \geqslant 4\pi A_f,$$

så hvis vi bruger det på $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ fra notation 2.7, får vi

$$\Big(\int_0^{2\pi} |\varphi_k(e^{i\theta})|\,d\theta\Big)^2 \geqslant 4\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\varphi_k(re^{i\theta})|^2 r\,d\theta\,dr.$$

Da dette gælder for hvert k summer vi sammen og får

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \Big(\int_0^{2\pi} |\varphi_k(e^{i\theta})|\,d\theta\Big)^2 \geqslant 4\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} |\varphi_k(re^{i\theta})|^2 r\,d\theta\,dr. \tag{2.9}$$

Højresiden er lig med $4\pi A$ fra lemma 2.11. Bruger vi (2.6) på venstresiden, og lader $g_k(\theta) = |\varphi_k(e^{i\theta})|^2$, får vi

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \Big(\int_0^{2\pi} |\varphi_k(e^{i\theta})|\,d\theta\Big)^2 \leqslant \bigg(\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{K=1}^{3} |\varphi_k(e^{i\theta})|^2\Big)^{1/2} d\theta\bigg)^2, \tag{2.10}$$

hvor venstresiden er lig med L^2 fra lemma 2.11. Så når vi sammenholder lemma 2.11 med (2.9) og (2.10) får vi

$$L^2 \geqslant 4\pi A.$$

□

Eksempel

Vi skal se på en familie af flader, der alle er minimalflader, nemlig

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{[t]}(u,v) = \cos t(&\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u)\\ &+ \sin t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v).\end{aligned}$$

For $t \equiv 0$ får vi helikoiden, mens vi for $t \equiv \pi/2$ får katenoiden.

Vi ser at $\boldsymbol{\sigma}_{[t]}(u,v)$ er en minimalflade ved at beregne E, F, G, L, M og N.

$$\begin{gathered} E = G = \cosh^2 v, \quad F = 0,\\ -L = N = \sin t \cosh v, \quad M = \cos t \cosh v.\end{gathered}$$

Da $E = G$, $L + N = 0$ og $F = 0$, er middelkrumningen nul

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0,$$

så $\boldsymbol{\sigma}_{[t]}(u,v)$ er minimal. Bemærk at alle fladerne er konforme, da $E = G$ og $F = 0$.

Lad os nu se på en cirkelskive C_R med radius R på fladen. Vi lader derfor

$$u(\theta) = r\cos\theta, \quad v(\theta) = r\sin\theta,$$

for $0 < r \leqslant R$ og $0 \leqslant \theta < 2\pi$, og bemærker at $\frac{du}{d\theta} = -v$ og $\frac{dv}{d\theta} = u$.

Vi kan finde omkreds og areal af billedet. Først omkredsens længde

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R) &= \int_0^{2\pi} \left(E(\tfrac{du}{d\theta})^2 + 2F\tfrac{du}{d\theta}\tfrac{dv}{d\theta} + G(\tfrac{dv}{d\theta})^2\right)^{1/2} d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \left(R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\cosh^2(R\sin\theta)\right)^{1/2}\\ &= \int_0^{2\pi} R\cosh(R\sin\theta)\, d\theta, \end{aligned}$$

så arealet

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R) &= \iint_{C_R} (EG - F^2)^{1/2}\, dudv\\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} rE\, d\theta dr\\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r\cosh^2(rsin\theta)\, d\theta dr. \end{aligned}$$

Det er dog ikke så ligetil at regne disse integraler ud, men matematikprogrammet Maple kan give os resultatet af et eksempel.

Synes man det er pænere, kan $A_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R)$ skrives

$$A_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R) = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} + \frac{2R^2(\sinh(2R\sin\theta))^2 - \cosh(2R\sin\theta) - 1}{8\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Se f.eks. [Schaum].

På forsiden af raporten ses billedet af en cirkelskive med $R = 4$, og centrum i origo på helicoiden. Med dette eksempel får vi $L \approx 280$ og $A \approx 2500$, så

$$(L_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R))^2 > 4\pi A_{\boldsymbol{\sigma}}(C_R).$$

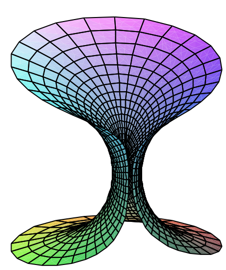
Der gælder altså ikke lighedstegn.

Lad os nu se på hvad der sker hvis vi bevæger os væk fra centeraksen på helicoiden, dvs. hvis vi lader v vokse. Vi finder Gaußkrumningen

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{\cosh^2 v},$$

og kan se, at den går mod nul for v voksende mod det uendelige, hvor billedet bliver mere plan. Så langt fra centeraksen kan man forestille sig en cirkelskive, hvor vi kommer vilkårligt tæt på lighed i den isoperimetriske ulighed.

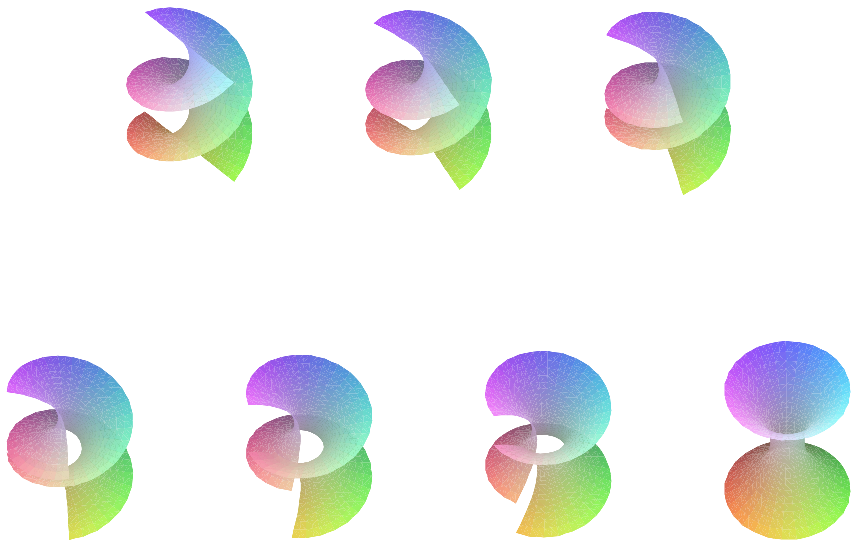
På katenoiden skal vi være opmærksomme på, at ved en cirkelradius større end π får vi et overlap på katenoiden. På figur 2.11 er radius på cirklen lig 3.



(2.11)

Ved mellemstadierne mellem helicoiden og katenoiden skal vi være opmærksomme på at fladerne skærer sig selv. Helikoiden er nemlig en retliniet flade. Men når vi går over i mellemstadierne vil linierne afbøje i negativ retning hvor v er negativ, mens de vil afbøje i positiv retning hvor v er positiv. For en lille værdi af t skal vi langt ud for at se en skæring, mens vi for en værdi tæt på $\pi/2$ ser en skæring tættere på centeraksen. Mellemstadierne mellem helikoiden og katenoiden er derfor ikke regulære.

Herunder ses helicoiden og katenoiden samt nogle mellemstadier hvor $0 < t < \pi/2$.



(2.12)

På figur 2.12 er t i $\boldsymbol{\sigma}_{[t]}$ sat til $n/12\pi$ hvor $n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

Konklusion

Vi fik brugt Steinersymmetriseringen til bl.a. at vise den isodiametriske ulighed

$$\mathbf{v}_n(K) \leqslant \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2} \right)^n.$$

Vi så et eksempel på hvorfor det var hensigtsmæssigt at bruge Minkowskiareal til bestemmelse af mangfoldighedens overflade, og fik beregnet overflade og volumen af en kugle i Euklidisk rum, samt formuleret og bevist den isoperimetriske ulighed

$$A^n \geqslant n^n \omega_n V^{n-1}.$$

Vi fik ikke vist at vi har en kugle når ligheden gælder. Ligeledes er der åbnet op for en række optimeringsproblemer omkring Steinersymmetrier, som der heller ikke har været tid til at granske nærmere.

Ved at beregne areal og volumen af en minimalflade, og benytte den isoperimetriske ulighed i $\mathbb{R}^2$ samt andre kendte uligheder, kom vi frem til, at den isoperimetriske ulighed gælder for alle minimalflader. Herefter så vi et eksempel med en skive på en minimalflade, og bemærkede at der i tilfældet ikke galdt lighed i den isoperimetriske ulighed.

Litteratur

[do Carmo] Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, IMPA, Prentice Hall, 1976
[Chavel] Isaac Chavel, Isoperimetric Inequalities - Differential Geometric and Analytic Perspectives, Cambridge University Press, 2001
[Hardy et al.] G. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1952
[Körner] T. W. Körner, A Companion to Analysis - A Second First and First Second Course in Analysis, Providence, R.I., Amer. math. soc., Graduate studies in mathematics, 2003
[Osserman,1969] Robert Osserman, A survey of minimal surfaces, Stanford University, 1969
[Osserman,1978] Robert Osserman, The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc. 84, 1978, 1182-1238
[Pressley] Andrew Pressley, Elemetary Differential Geometry, Springer, 2001
[Rudin] Walter Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill Book, 1987
[Schaum] Murray R. Spiegel, Math. handbook of formulas and tables, Schaum's outline series, Mc-Graw-Hill, 1968
[Weisstein] Eric W. Weisstein, "Hypersphere", "Gamma Function", "Double Factorial", "Catenoid" og "Helicoid", MathWorld.Wolfram.com